

## 岩土设计整体解决方案



midas **SoilWorks**

# 分析理论手册



# 著作权和商标使用说明

MIDAS系列软件中文版包含了北京迈达斯技术有限公司开发的建筑/桥梁/岩土/机械领域的CAE软件。与MIDAS系列软件相关的书籍受计算机软件保护条例和中华人民共和国著作权法保护。对与程序相关资料的咨询请与下列地址联系。

北京迈达斯技术有限公司

地址：北京市海淀区中关村南大街乙56号方圆大厦21层

电话：010-5165-9908

传真：010-5165-9909

E-mail: BeiJing@midasuser.com

网站地址: <http://www.MidasUser.com>.

## 程序免责声明(必读)

MIDAS系列软件在开发时通过数千个例题的计算，与理论值、实验值、其它程序进行了比较验证，程序不仅内涵了最新的理论和技术，而且提供了优秀的分析和设计结果。MIDAS系列软件从1989年开发至今在建筑/桥梁/岩土/机械领域被应用于约上万个实际工程项目中，证明了程序的准确性和高效性。

声明：结构分析与设计需要分析和设计人员具有深厚的理论基础和设计经验，因此，对于使用MIDAS程序产生的任何利益和损失，MIDAS系列软件的开发者和技术支持人员不具有任何权利和责任；用户在使用程序之前需要详细并准确地了解程序的内容和操作方法，对分析和设计结果需要详细的验证后方可使用。

## DISCLAIMER

Developers and sponsors assume no responsibility for the use of MIDAS family program(midas Gen, midas Civil, midas GTS, midas Soilworks, midas FEA, midas Building, midas FX+, Nastran FX: hereinafter referred to as “MIDAS Package” or for the accuracy or validity of any results obtained from the MIDAS package.

Developers and sponsors shall not be liable for loss of profit, loss of business, or other financial loss which may be caused directly or indirectly by the MIDAS package, when used for any purpose or use, due to any defect or deficiency therein.



# 前 言

SoilWorks是由隧道分析、边坡稳定分析、固结(软弱地基)分析、基础分析、渗流分析、动力分析等六个模块组成的二维岩土分析设计整体解决方案。

## SoilWorks和迈达斯系列软件

---

迈达斯系列软件自1989年开始开发以来，迄今为止开发的结构分析和设计软件如下：

	SoilWorks	二维岩土分析与设计整体解决方案
岩土领域	midas GTS	岩土和隧道有限元分析软件
	GeoXD	支护结构分析与设计与施工图整体解决方案
	midas Civil	桥梁结构分析和设计软件
	midas FEA	有限元仿真分析软件
桥梁领域	midas SmartBDS	箱形梁桥分析设计自动化软件
	midas UMD	土木结构单体结构设计辅助软件
	midas Abutment	桥台设计专用软件
	midas Pier	桥墩设计专用软件
	midas Deck	桥梁面板设计专用软件
	midas Gen	建筑结构分析和设计软件
	midas Building	建筑大师软件
建筑领域	midas Foundation	基础大师软件
	midas Modeler	建模师
	midas Drawing	绘图师
	midas ADS	剪力墙住宅专用分析与设计系统
	midas SDS	楼板和筏板结构分析与设计系统
机械领域	midas NFX	多物理场分析设计软件
	Nastran FX	通用结构仿真分析软件

## SoilWorks的优点和特征

---

SoilWorks是在岩土领域的教授以及业界相关设计人员的帮助下开发的二维岩土分析与设计整体解决方案，程序不仅采用了MIDAS IT独有的图形处理、网格划分、数值分析技术，而且结合了隧道、边坡、固结、基础、渗流、动力分析等专业方面的最新的分析与设计技术，力求为用户提供一款专业、实用、高效、方便的岩土分析与设计整体解决方案。

SoilWorks提供了直观、多样、快捷的建模功能，最新的求解器提供了卓越的分析速度，独有的网格划分技术为用户提供了高品质的网格，图形处理技术为用户提供了美观又实用的前后处理操作界面，是一款易学习、易使用、功能强大的岩土分析软件。

SoilWorks提供了大量的验证例题，对所有功能都进行了与理论值和其他通用程序结果的比较，经过大量实际工程的检验，证明了其可靠性和高效性。

## 感谢词

---

SoilWorks在开发过程中得到了国内岩土设计人员和学界教授的鼎力支持，借此向国内同行、前辈、教授表示感谢。

最后对参与开发SoilWorks的开发人员及其家属表示感谢，感谢他们一直以来的牺牲与奉献精神。

## 操作指南

---

SoilWorks的用户手册由下面四本手册和联机帮助组成。

- |     |  |
|-----|--|
| 第1册 | 用户操作指南<br>程序概要和程序使用前应知事项                             |
| 第2册 | 分析理论手册<br>对数值分析理论、材料、单元、分析功能的介绍                      |
| 第3册 | 跟随操作例题集<br>各模块的跟随操作学习例题                              |
| 第4册 | 验证例题集<br>提供了各模块的验证例题。验证例题集以PDF文档方式包含于安装程序中(不提供印刷手册)。 |

联机帮户包含于程序中，介绍了各功能的详细的使用方法以及对各输入项目的说明。

为了理解和学习掌握SoilWorks，请按照下列步骤学习后使用程序。

### 1. 请阅读分析理论手册

分析理论手册中对程序的分析理论背景进行了介绍，只有具备了这些专业知识才能进行正确的分析。从以往经验看，使用者理论基础与分析经验的不足，会造成操作失误或输入参数错误，从而引起结果发生误差。

### 2. 请阅读用户操作指南手册

首先学习书中的安装说明，按照书中步骤安装程序。其次要学习书中对程序的整体概念的介绍。

### 3. 使用跟随操作例题进行操作

通过使用跟随操作例题，可以学习和掌握程序操作的流程。

### 4. 借助联机帮助随时学习程序功能

在迈达斯网站中将登载各种验证例题、实际工程案例，岩土方面的技术资料，用户还可以通过电话、网站、E-mail获得技术支持。



# 分析理论手册

- 第1部分 材料本构模型
- 第2部分 隧道分析
- 第3部分 边坡稳定分析
- 第4部分 固结分析
- 第5部分 基础分析
- 第6部分 渗流分析
- 第7部分 动力分析



## 第1部分

---

# 材料本构模型

- 第1章 材料本构模型概要
- 第2章 结构材料模型
- 第3章 岩土材料模型
- 第4章 渗流材料模型
- 附录





# 材料本构模型

## ○ 第1章 材料模型概要 / 001

- 1.1 概要 / 001
- 1.2 弹塑性模型的屈服准则 / 003
  - 1.2.1 应力不变量 / 003

## ○ 第2章 结构材料模型 / 008

- 2.1 土工格栅单元 / 008
- 2.2 弹性连接单元 / 009
- 2.3 界面单元 / 010
  - 2.3.1 概要 / 010
  - 2.3.2 材料参数 / 010
  - 2.3.3 材料非线性特性 / 011
- 2.4 桩单元 / 013
  - 2.4.1 概要 / 013
  - 2.4.2 材料参数 / 014
  - 2.4.3 材料非线性特性 / 014
- 2.5 锚、岩石锚杆、土钉单元 / 017
  - 2.5.1 概要 / 017
  - 2.5.2 材料参数 / 018
  - 2.5.3 材料非线性特性 / 019

## ○ 第3章 岩土材料模型 / 021

- 3.1 线性弹性模型 / 021
  - 3.1.1 概要 / 021
  - 3.1.2 材料参数 / 022
- 3.2 特雷斯卡模型 / 024
  - 3.2.1 概要 / 024
  - 3.2.2 材料参数 / 024
  - 3.2.3 屈服函数 / 024
- 3.3 范梅塞斯模型 / 027
  - 3.3.1 概要 / 027
  - 3.3.2 材料参数 / 027
  - 3.3.3 屈服函数 / 027
- 3.4 莫尔-库伦模型 / 030
  - 3.4.1 概要 / 030
  - 3.4.2 材料参数 / 031
  - 3.4.3 屈服函数 / 032
- 3.5 德鲁克-普拉格模型 / 036
  - 3.5.1 概要 / 036
  - 3.5.2 材料参数 / 036
  - 3.5.3 屈服函数 / 036
- 3.6 双曲线模型(邓肯-张模型) / 039
  - 3.6.1 概要 / 039
  - 3.6.2 材料参数 / 040
  - 3.6.3 初始切线模量 / 041
  - 3.6.4 切线模量 / 042
  - 3.6.5 卸载-重新加载模量 / 042
  - 3.6.6 泊松比 / 043
  - 3.6.7 屈服区域 / 043

- 3.7 霍克-布朗模型 / 045
  - 3.7.1 概要 / 045
  - 3.7.2 材料参数 / 045
  - 3.7.3 屈服函数 / 045
- 3.8 修正剑桥粘土模型 / 047
  - 3.8.1 概要 / 047
  - 3.8.2 材料参数 / 048
  - 3.8.3 屈服函数 / 050
  - 3.8.4 初始条件 / 052
- 3.9 D-min模型 / 054
  - 3.9.1 概要 / 054
  - 3.9.2 材料参数 / 056
- 3.10 关口-太田模型 / 057
  - 3.10.1 概要 / 057
  - 3.10.2 材料参数 / 057
  - 3.10.3 屈服函数 / 062
  - 3.10.4 初始条件 / 064

## ○ 第4章 渗流材料模型 / 066

- 4.1 渗流系数函数 / 066
- 4.2 体积含水率函数 / 067
- 4.3 关联函数 / 069

## ○ 附录 / 070

- A 输出安全系数功能 / 070
- B 输出塑性状态功能 / 072





# 材料模型概要

## 1.1 概要

在SoilWorks中的材料本构模型按结构和岩土可分类如下。

### 1) 结构本构模型(structural constitutive model)

- ✓ 弹性连接单元的非线性本构模型
- ✓ 土工格栅纤维模型
- ✓ 界面本构模型
- ✓ 桩非线性模型
- ✓ 锚、岩石锚杆、土钉的界面本构模型

### 2) 岩土本构模型(geotechnical constitutive model)

- ✓ 线弹性模型(Linear elastic model)
- ✓ 特雷斯卡模型(Tresca model)
- ✓ 范梅塞斯模型(Von Mises model)
- ✓ 莫尔-库伦模型(Mohr-Coulomb model)
- ✓ 德鲁克-普拉格模型(Drucker-Prager model)
- ✓ 双曲线模型(Hyperbolic model, 邓肯-张模型(Duncan-Chang model))
- ✓ 霍克-布朗模型(Hoek-Brown model)
- ✓ 修正剑桥-粘土模型(Modified Cam-Clay model)
- ✓ 日本电力中央研究所模型(D-min model)
- ✓ 关口-太田模型(Sekiguchi-Ohta model)

### 3) 渗流本构模型(seepage constitutive model)

- ✓ 渗流系数函数
- ✓ 体积含水率函数
- ✓ 协调函数

根据材料本构的特性可将本构模型区分为弹性模型、非线性弹性模型、弹塑性模型。

### A. 弹性模型(elastic model)

#### A-1. 线性弹性模型(linear elastic model)

- ✓ 线性弹性模型(Linear elastic model)

#### A-2. 非线性弹性模型(nonlinear elastic model)

- ✓ 弹性连接单元的非线性特性
- ✓ 线单元的土工格栅模型
- ✓ 桩的非线性模型(Pile nonlinear model)
- ✓ 日本电力中央研究所模型(D-min model)

### B. 弹塑性模型(elastoplastic model)

- ✓ 界面特性
- ✓ 地脚锚栓、岩石锚杆、土钉的截面特性
- ✓ 特雷斯卡模型
- ✓ 范梅塞斯模型
- ✓ 莫尔-库伦模型
- ✓ 德鲁克-普拉格模型
- ✓ 双曲线模型(邓肯-张模型)
- ✓ 霍克-布朗模型
- ✓ 修正剑桥粘土模型
- ✓ 关口-太田模型

### C. 弹粘性模型(elasto-viscoplastic model)

- ✓ 关口-太田模型

对于非线性弹性模型和弹塑性材料模型的分析过程可参考隧道手册的“1.3非线性分析”章节。本手册的第1.2章节中介绍了弹塑性材料模型的屈服标准(yield criteria)，在第2章中介绍了结构材料本构模型，在第3章和第4章中分别介绍了岩土材料本构模型和渗流本构模型。

## 1.2 弹塑性模型的屈服准则

因为使用相关的多轴应力状态来表达屈服函数比较困难，所以一般使用独立的主应力成分按如下公式表现屈服条件。

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (1.2.1)$$

### 1.2.1 应力不变量(stress invariants)

#### 1.2.1.1 应力张量不变量

假设任意点上的应力和主应力方向分别为  $\sigma_{ij}$ 、 $n_j$ ，则有下列公式。

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (1.2.2)$$

其中， $\delta_{ij}$  为克罗内克符号(Kronecker delta)，且  $n_j \neq 0$ 。

满足公式(1.2.2)的充分必要条件如下。

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (1.2.3)$$

公式(1.2.3)可使用主应力的三次公式表达如下。

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (1.2.4)$$

其中，

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ii} \\
 I_2 &= (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{1}{2}(I_1^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) \\
 I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - \frac{1}{2} I_1 \sigma_{ij} \sigma_{ji} + \frac{1}{6} I_1^3
 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

因为某点的主应力并不因为坐标方向而改变，因此公式(1.2.4)中  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  与坐标无关，被称为应力张量的不变量，可使用主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  表达如下。

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
 I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\
 I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3
 \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

#### 1.2.1.2 应力偏量的不变量

应力张量  $\sigma_{ij}$  可按下面公式分解为应力偏量和应力球张量(静水压力状态)。

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \tag{1.2.7}$$

其中， $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = I_1/3$  为平均应力(静水压力)， $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$  为应力偏量。

应力偏量的不变量可使用下面公式计算。

$$|s_{ij} - s \delta_{ij}| = 0 \tag{1.2.8}$$

公式(1.2.8)可使用如下方程式表达。

$$s^3 - J_1 s^2 + J_2 s - J_3 = 0 \tag{1.2.9}$$

其中，



$$\begin{aligned}
 J_1 &= s_{ii} = s_x + s_y + s_z = 0 \\
 J_2 &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} \\
 &= \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (1.2.10) \\
 J_3 &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

将  $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$  用主应力偏量  $s_1$ 、 $s_2$ 、 $s_3$  表示如下。

$$\begin{aligned}
 J_1 &= s_1 + s_2 + s_3 = 0 \\
 J_2 &= \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (1.2.11) \\
 J_3 &= \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1 s_2 s_3
 \end{aligned}$$

$I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$  均为与坐标无关的常量，一般常用的是  $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$  三个应力偏量的不变量，其中  $J_1$  称为应力偏量的第一不变量、 $J_2$  称为应力偏量的第二不变量、 $J_3$  为应力偏量的第三不变量。

### 1.2.1.3 三个应力不变量的几何意义

大部分材料模型的屈服由应力偏量决定，将屈服函数分解为静水压力和应力偏量，便于定义屈服函数的几何形状(屈服面形状)。

下面将任意点上的应力  $\mathbf{P}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  分解为等压轴向应力(静水压力)和偏差轴向应力说明如下。

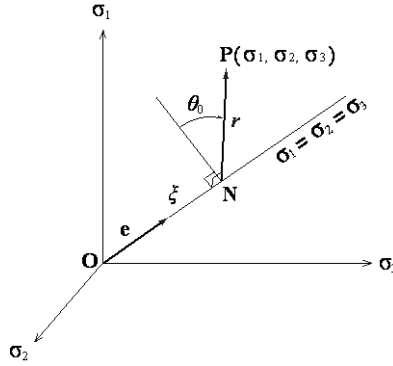


图 1.2.1 主应力空间上的应力状态

如图1.2.1所示，在主应力空间上任意点  $\mathbf{P}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  的向量  $\mathbf{OP}$  由静水压力方向向量  $\mathbf{ON}$  和与静水压方向垂直的偏差平面上的向量  $\mathbf{NP}$  组成，其大小如下。

$$\begin{aligned} |\mathbf{ON}| &= \xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \\ |\mathbf{NP}| &= r = \sqrt{2J_2} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

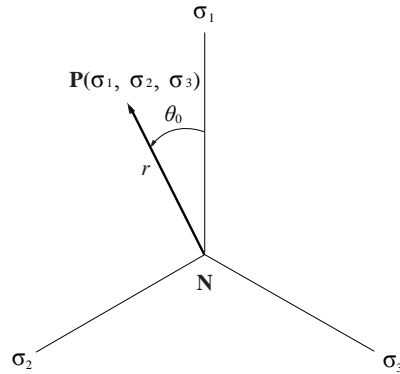


图 1.2.2 偏差平面上的应力状态

图1.2.2是与等压轴垂直的偏差应力平面，为了定义偏差平面上的点  $\mathbf{P}$  需要将  $\sigma_1$  轴旋转  $\theta_0$ ， $\theta_0$  称为相似角(similarity angle)。

$$\theta_0 = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad (1.2.13)$$

此时  $\theta_0$  的范围如下。

$$0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{3} \quad (1.2.14)$$

在数值分析中，一般使用洛德角  $\theta$  (Lode's angle)。

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad (1.2.15)$$

此时有  $\theta = \theta_0 - \frac{\pi}{6}$ ，其范围如下。

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad (1.2.16)$$

可用应力不变量和洛德角表达主应力如下。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin(\theta) \\ \sin\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.2.17)$$



## 2.1 土工格栅单元

SoilWorks中的土工格栅单元是只能承受拉力的桁架单元，且受拉特性采用了非线性弹性模型。

SoilWorks中的土工格栅单元的受拉特性本构关系参见下图2.1.1。

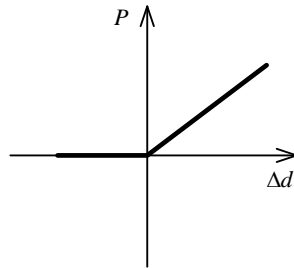


图 2.1.1 土工格栅单元的只受拉特性

图2.1.1中的  $\Delta d$  表示两节点间的相对位移， $P$  为构件内力。

## 2.2 弹性连接单元

SoilWorks中的弹性连接单元可具有下列几种特性。

- ✓ 一般连接(general)
- ✓ 刚体(rigid)
- ✓ 只受拉(tension Only)
- ✓ 只受压(compression Only)

一般连接的特性由输入的各方向弹簧的刚度决定；刚体则是将两个节点间用较大的刚度连接起来，该功能与刚性连接的不同之处在于两个节点间没有主从关系。

只受拉和只受压特性参见下图2.2.1。

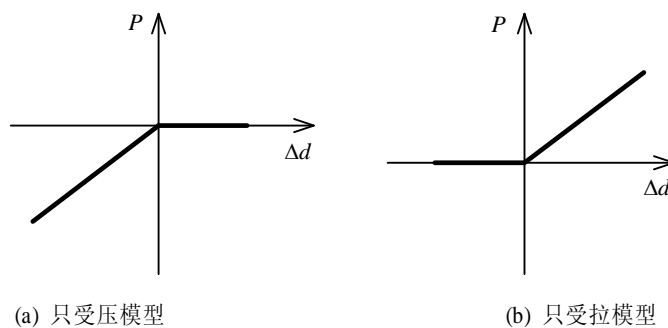


图 2.2.1 弹性连接单元的非线性特性

如图2.2.1所示， $\Delta d$  为两个节点间的相对位移， $P$  为构件内力。

## 2.3 界面单元

### 2.3.1 概要

界面单元用于模拟不同材料或相同材料间的接触面，虽然分类为结构本构模型，但也可以用于模拟节理或地层的层理。界面材料模型采用了库伦的摩擦法则(1785)，即界面的摩擦力与摩擦系数以及垂直于界面的法线方向的约束力的大小成正比。

界面材料模型在岩土中主要用于模拟摩擦桩与周边土体的连接界面特性，挡土墙与土体的连接界面特性，衬砌与土体的连接界面特性等结构物与土体的接触界面特性。界面模型在桥梁、建筑中可用于模拟钢材和混凝土的接触界面特性、钢筋与混凝土的滑移特性、混凝土的离散裂缝、砌体间的接触界面特性等。界面模型在实际工程中的应用越来越频繁。

### 2.3.2 材料参数

库伦摩擦材料需要输入的材料参数见表2.3.1。

表2.3.1 库伦摩擦材料的材料参数

材料参数	说明
法向刚度系数( $k_n$ )	界面的法线法向刚度
剪切刚度系数( $k_t$ )	界面的切线方向刚度
粘聚力( $c$ )	界面的粘聚力
内摩擦角( $\phi$ )	界面的内摩擦角
拉力切断抗拉强度	考虑界面的抗拉强度
Mode-II模型的剪切刚度折减率	剪切刚度的刚度折减率
粘聚力多折线硬化函数	粘聚力的非线性特性
内摩擦角多折线硬化函数	内摩擦角的非线性特性

## 2.3.3 材料非线性特性

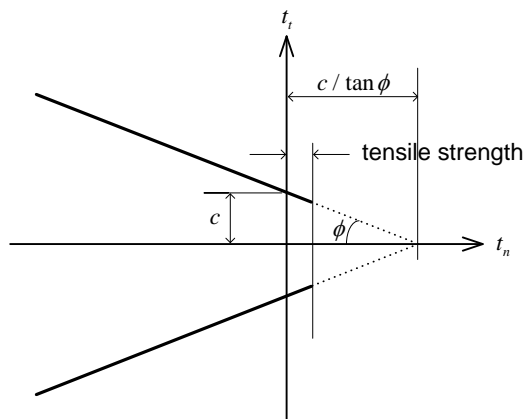


图 2.3.1 库伦摩擦准则

库伦摩擦模型的破坏函数  $f$  和势能函数  $g$  采用三参数描述，即摩擦角  $\phi$ 、粘聚力  $c$ 、膨胀角  $\psi$  描述如下。

$$\begin{cases} f = \sqrt{t_t^2 + t_n^2} \tan \phi(\kappa) - c(\kappa) = 0 \\ g = \sqrt{t_t^2 + t_n^2} \tan \psi \end{cases} \quad (2.3.3)$$

其中，

$\phi(\kappa)$  : 使用内部参数  $\kappa$  定义的内部摩擦角函数。

$c(\kappa)$  : 使用内部参数  $\kappa$  定义的粘聚力函数。

$\psi$  : 膨胀角，对于竖向应力表现为常量。

塑性相对位移  $\Delta \mathbf{u}^p$  可用塑性乘数和表示塑性变形方向的成分定义如下。

$$\Delta \mathbf{u}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}} \quad (2.3.4)$$

使用台劳级数(Taylor series)展开破坏函数  $f$  如下。

$$\dot{f} = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right)^T \dot{\mathbf{t}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (2.3.5)$$

将(2.3.2)、(2.3.4)代入(2.3.5)，整理  $\dot{\lambda}$  可得如下公式。

$$\dot{\lambda} = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right)^T \mathbf{D}^e \Delta \dot{\mathbf{u}}}{-\frac{\partial f}{\partial \kappa} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right)^T \mathbf{D}^e \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}}} \Delta \dot{\mathbf{u}} = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right)^T \mathbf{D}^e \Delta \dot{\mathbf{u}}}{-h + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right)^T \mathbf{D}^e \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}}} \Delta \dot{\mathbf{u}} \quad (2.3.6)$$

其中， $h$  为硬化参数(hardening parameter)。

内部参数增量  $\dot{\kappa}$  与塑性乘数增量  $\dot{\lambda}$  的关系如下。

$$\dot{\kappa} = |\Delta \dot{\mathbf{u}}^p| = \dot{\lambda} \left| \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}} \right| = \dot{\lambda} \sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}} \right)^T \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}} \right)} = \dot{\lambda} \sqrt{1 + \tan^2 \psi} = \dot{\lambda} \quad \because \tan \psi \ll 1 \quad (2.3.7)$$

其中， $\partial g / \partial \mathbf{t} = \left\{ \tan \psi \quad t_t / \bar{t}_t \right\}$

将(2.3.4)、(2.3.6)代入(2.3.2)可得下式。

$$\dot{\mathbf{t}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}^e \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right)^T \mathbf{D}^e \\ -h + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right)^T \mathbf{D}^e \frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}} \end{array} \right\} \Delta \dot{\mathbf{u}} \quad (2.3.8)$$

其中，

$$\mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix}$$



$$h = \frac{\partial f}{\partial \kappa} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta \mathbf{u}_i^p} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_i^p}{\partial \kappa}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{t}} = \left\{ \tan \psi \quad \frac{t_i}{|t_i|} \right\}$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right)^T = \left\{ \tan \phi(k) \quad \frac{t_i}{|t_i|} \right\}$$

将上面公式可整理成如下公式。

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{1}{-h + k_n \tan \phi \tan \psi + k_t} \begin{bmatrix} k_n(h + k_t) & -k_n k_t \tan \psi \frac{t_i}{|t_i|} \\ -k_n k_t \tan \phi(k) \frac{t_i}{|t_i|} & k_t(h + k_n \tan \phi \tan \psi) \end{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{u}} \quad (2.3.9)$$

当  $\phi \neq \psi$  时，式(2.3.9)中的括号  $\left[ \begin{array}{cc} & \end{array} \right]$  内矩阵为非对称矩阵，将发生非关联塑性流动；当  $\phi = \psi$  时，式(2.3.9)中的括号  $\left[ \begin{array}{cc} & \end{array} \right]$  内矩阵为对称矩阵，将发生关联塑性流动。当进行相关联塑性流动分析时，在与界面垂直的方向会发生与实际情况不符现象。当进行非关联塑性流动分析时，因需要保存的刚度矩阵较大，因此需要更多的内存且分析时间也较长。特别是当  $\phi$  与  $\psi$  值相差较大时，将不容易收敛。因此在SoilWorks中推荐  $\phi - \psi \leq 20^\circ$ 。

## 2.4 桩单元

### 2.4.1 概要

桩单元的非线性模型是指用梁或桁架单元模拟桩时，桩与土体的接触界面的非线性模型。该模型由两个垂直于界面的法线方向和一个与界面平行的切线方向的特性构成。程序默认在两个法线方向上桩与土完全耦合变形相同，在切线方向则表现为非线性特性。在桩端的假设也与桩身相同。

桩单元的单元形状和单元坐标系可参考隧道手册。

在SoilWorks中桩的界面模型使用非线性弹性模型，将在2.4.3中进行详细介绍。

## 2.4.2 材料参数

桩单元模型需要输入的材料参数见表2.4.1。

表2.4.1 桩身及桩端的材料参数

材料参数	说明
极限剪力	界面的极限剪力
剪切模量	剪切方向的刚度
桩身剪切方向函数	桩身的剪切方向函数
法向刚度(Kn)	桩身界面法向刚度
参考高度	桩单元的基准高度
摩擦力-相对位移曲线的斜率	桩身摩擦力与相对位移曲线的斜率
桩端承载力	桩端的竖向承载力
桩端刚度	桩端刚度
桩端单元的函数	桩端单元的函数

## 2.4.3 材料非线性特性

桩身和桩端单元的界面的特性分为切线方向和法线方向，在SoilWorks中切线方向使用非线性模型，法线方向使用线性弹性模型。

定义非线性模型的方法又分为定义屈服力的方法和定义函数的方法。定义屈服力的方法参见图2.4.1所示，需要定义随高度变化的非线性特性的斜率和屈服力。定义函数的方法是由用户定义的函数计算曲率决定本构的方法。

用户定义的相对位移-摩擦力的关系曲线表现的是界面的面内刚度的变化规律。为了获得与实际情况接近的剪切方向的界面力，需要对关系曲线得到的刚度进行修正，方法参见图 2.4.2 以及公式(2.4.1)。

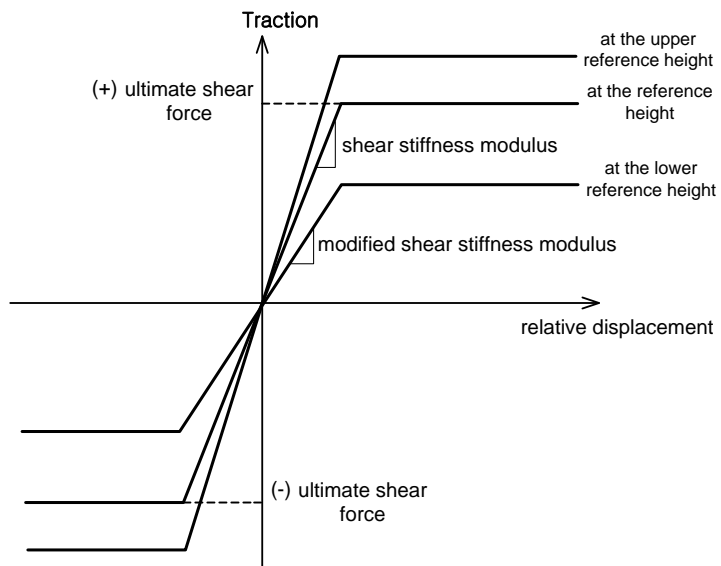


图 2.4.1 相对位移-摩擦力关系曲线

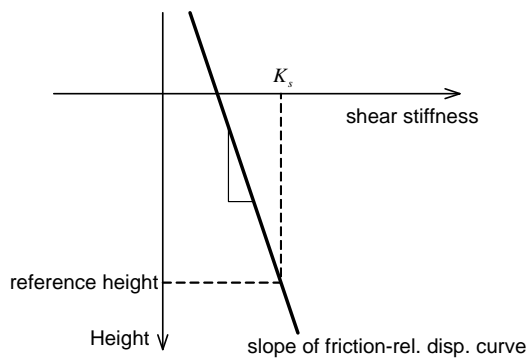


图 2.4.2 在参考高度的剪切刚度的变化

$$k_s = k_s^{ref} + (y^{ref} - y) \times k_s^{inc} \quad (2.4.1)$$

$$f = 1 + a \cdot \frac{(y - y_{ref})}{t}$$

其中，

$k_s$	: 切线方向刚度
$y^{ref}$	: 参考高度
$k_s^{ref}$	: 参考高度位置的刚度
$f$	: 刚度增量
$y$	: 当前计算的积分点位置
$a$	: 相对位移和摩擦力关系曲线的变化率
$t$	: 极限剪切力

由上述刚度增量系数可计算刚度和极限剪力，此时应注意图2.4.2中的深度方向为整体坐标系的-Z方向。

## 2.5 锚、岩石锚杆、土钉单元

### 2.5.1 概要

锚、岩石锚杆、土钉单元是在桁架单元上增加了与周边岩土界面单元的一维单元。如图 2.5.1 所示，锚单元分为自由区(free length)和锚固区(bond length)，而岩石锚杆和土钉单元则沿全长为锚固区。

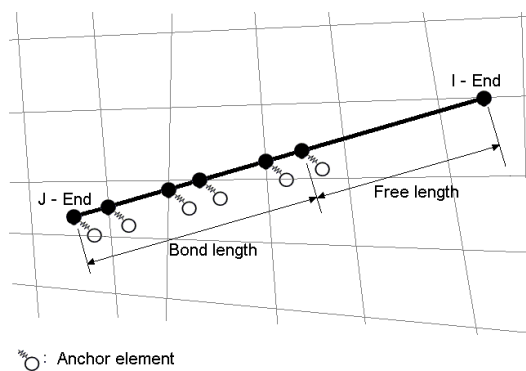


图 2.5.1 锚单元

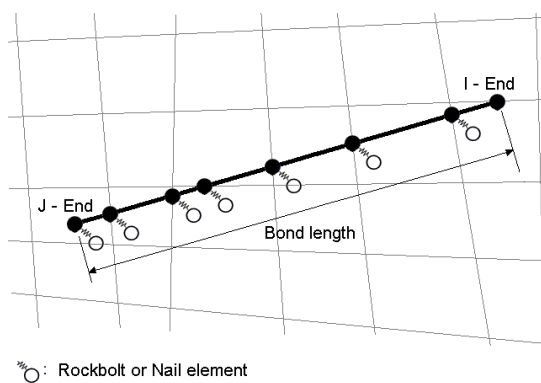


图 2.5.2 岩石锚杆或土钉单元

## 2.5.2 材料参数

锚、岩石锚杆、土钉单元需要输入的材料参数如下表所示。

表2.5.1 锚单元需要输入的材料参数

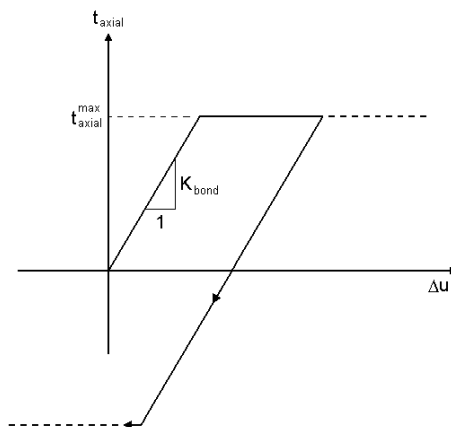
材料	材料参数	单位
支护材料	弹性模量(elastic modulus)	$N / mm^2$
	抗压屈服强度(Compressive yield strength)	$MPa$
	抗拉屈服强度(Tensile yield strength)	$MPa$
	直径(Diameter)	$mm$
	锚固区内部节点号	
	锚固区长度(Bond length)	$mm$
喷混	抗压强度(Grout compressive strength)	$MPa$
	剪切模量(Grout shear modulus)	$MPa$
	摩擦角(Grout friction angle)	$Degree$
	喷混厚度(Grout annulus thickness)	$mm$
岩土	抗压强度(Compressive strength)	$MPa$

表2.5.2 岩石锚杆和土钉单元需要输入的材料参数

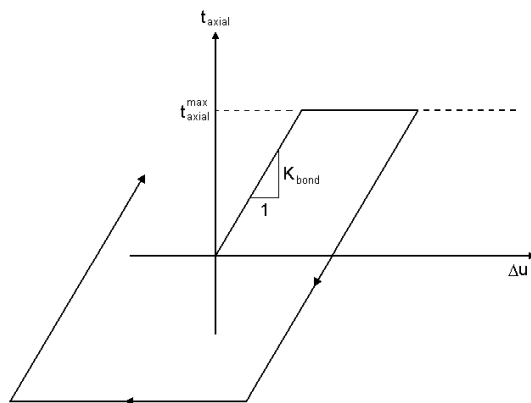
材料	材料参数	单位
支护材料	弹性模量(elastic modulus)	$N / mm^2$
	抗压屈服强度(Compressive yield strength)	$MPa$
	抗拉屈服强度(Tensile yield strength)	$MPa$
	直径(Diameter)	$mm$
喷混	抗压强度(Grout compressive strength)	$MPa$
	剪切模量(Grout shear modulus)	$MPa$
	摩擦角(Grout friction angle)	$Degree$
	喷混厚度(Grout annulus thickness)	$mm$
岩土	抗压强度(Compressive strength)	$MPa$

### 2.5.3 材料非线性特性

锚、岩石锚杆、土钉单元的材料特性可参照midas GTS用户手册中对本构模型的说明，下面仅对这些单元上的与岩土接触的界面单元的材料特性进行说明。在支护材料和喷混之间、喷混和岩土之间的接触面之间的界面单元可使用相对位移-剪力的关系曲线作为本构模型。



(a) 卸载特性示意图



(b) 重新加载特性示意图

图 2.5.3 喷混的剪切特性

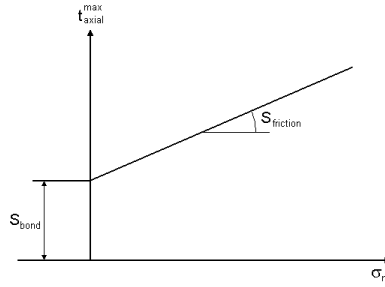


图 2.5.4 喷混的最大剪切强度

$K_{bond}$  可以通过现场抗拔试验计算获得，也可以通过下面近似公式计算。

$$K_{bond} = \frac{2\pi G}{10 \ln(1 + 2t_G / D) \pi D} \quad (2.5.1)$$

其中， $G$  为喷混的剪切模量， $t_G$  为喷混的厚度、 $D$  为支护材料的直径。

喷混的最大剪切强度和摩擦角也可以通过试验获得。如图2.5.4所示，最大剪切强度可假设为与有效约束压力  $\sigma'_m$  成正比，公式如下。

$$t_{axial}^{max} = S_{bond} + S_{friction} \times \sigma'_m \quad (2.5.2)$$

其中， $S_{friction}$  为喷混摩擦角， $\sigma'_m$  为有效约束压力。 $S_{bond}$  取岩土和喷混的剪切强度中的较小值，岩土和喷混的剪切强度可近似取单轴抗压强度的1/2。

有效约束压力  $\sigma'_m$  为作用在支护材料的节点上与支护材料垂直的平面内的约束应力，可通过将与支护材料节点相连的岩土单元的应力内插获得，其计算公式如下。

$$\sigma'_m = -\left( \frac{\sigma_{mm} + \sigma'_{zz}}{2} + p \right) \quad (2.5.3)$$

其中， $\sigma_{mm} = \sigma'_{xx}n_1^2 + \sigma'_{yy}n_2^2 + 2\sigma'_{xy}n_1n_2$

$\sigma'_{zz}$  为面外方向的应力， $p$  为孔隙水压力， $n_i$  为支护材料的轴向的方向余弦。





# 岩土材料模型

## 3.1 线性弹性模型(Linear elastic model)

### 3.1.1 概要

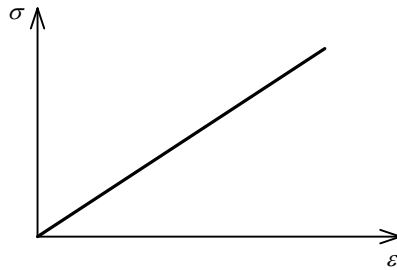


图 3.1.1 线性弹性应力-应变特性

线性弹性模型是最简单的本构模型，应力和应变的关系如下。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.1.1)$$

二维分析时有  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ ，对于平面应变单元有  $\varepsilon_z = 0$ 。

当  $\nu$  接近0.5时，因为  $(1-2\nu)/2$  接近零， $(1-\nu)$  接近  $\nu$ ，这表示应力和应变的关系与表示体

积应变的常数相关。另外当 $(1-2\nu)$ 接近于零时， $E/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ 将接近无穷大，表示 $\nu$ 接近于0.5时，体积应变接近于零。

所以，泊松比 $\nu$ 不能为0.5，且大于0.49的 $\nu$ 值容易引起较大的数值误差。在SoilWorks中泊松比值不能使用0.5。当为了模拟具有非压缩性(incompressible)特性的固体时，用户可输入接近0.5的泊松比值，但要确认是否发生了奇异及误差。

### 3.1.2 材料参数

线弹性模型需要输入的参数如下表所示。

表3.1.1 线弹性模型的材料参数

材料参数	说明
弹性模量( $E$ )	弹性模量
泊松比( $\nu$ )	泊松比
弹性模量增量	随高度变化的弹性模量的增量
参考高度	基准高度

线弹性模型因为没有屈服点，所以应力和应变值有可能与实际不符。因此建议使用莫尔-库伦等非线性材料模型。

在SoilWorks中可以考虑弹性模量随岩土深度的变化，当输入的弹性模量增量为零时，表示岩石的弹性模量沿深度没有变化。弹性模量沿深度的变化公式如下。

$$\begin{aligned}
 E &= E_{ref} + (Z_{ref} - Z)E_{inc} & (Z \leq Z_{ref}) \\
 E &= E_{ref} & (Z > Z_{ref})
 \end{aligned}
 \tag{3.1.2}$$

其中，

- $E_{ref}$  : 数的弹性模量值
- $E_{inc}$  : 弹性模量的增量斜率
- $Z_{ref}$  : 深度位置

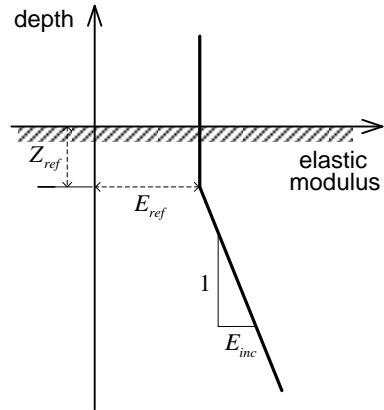


图 3.1.2 弹性模量沿深度变化示意图

公式(3.1.2)中的  $Z$  表示当前计算位置，当计算位置高于  $Z_{ref}$  时，则弹性模量值可能会小于零，此时弹性模量  $E$  将默认取  $E_{ref}$ 。

## 3.2 特雷斯卡模型

### 3.2.1 概要

特雷斯卡屈服准则一般用于模拟金属材料的屈服，在岩土分析中也用于模拟不排水条件下的岩土。其屈服标准为当某点的最大剪应力超过某个限值  $k$  时认为材料屈服，其数学表达式如下。

$$\frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1| = k \quad (3.2.1)$$

其中， $\sigma_3$  和  $\sigma_1$  分别是最大和最小主应力 ( $\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$ )， $k$  为纯剪切破坏的屈服应力，可通过试验获得。也可以将上面公式简化为如下公式。

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_y \quad (3.2.2)$$

其中  $\sigma_y$  为单轴抗压强度。

### 3.2.2 材料参数

特雷斯卡(Tresca)模型需要输入的参数参见下表。

表3.2.1 特雷斯卡材料参数

材料参数	说明
屈服应力( $\sigma_y$ )	单轴抗压强度

### 3.2.3 屈服函数

使用应力不变量  $J_2$  和  $\theta_0$  可以将公式(3.2.2)写成式(3.2.3)形式( $0^\circ \leq \theta_0 \leq 60^\circ$ )。

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \left[ \cos \theta_0 - \cos \left( \theta_0 + \frac{2}{3} \pi \right) \right] = \sigma_y \quad (3.2.3)$$

重新整理上面公式如下。

$$f(J_2, \theta_0) = 2\sqrt{J_2} \sin\left(\theta_0 + \frac{1}{3}\pi\right) - \sigma_y = 0 \quad (3.2.4)$$

使用  $\rho$ ,  $\xi$ ,  $\theta_0$  参数可将(3.2.4)整理成如下形式。

$$f(\rho, \theta_0) = 2\rho \sin\left(\theta_0 + \frac{1}{3}\pi\right) - \sqrt{2}\sigma_y = 0 \quad (3.2.5)$$

使用  $I_1, J_2, \theta$  参数可整理成如下形式  $\left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right)$ 。

$$\begin{aligned} f(J_2, \theta_0) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2} \left[ \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) \right] - \sigma_y \\ &= 2\sqrt{J_2} \cos\theta - \sigma_y = 0 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

特雷斯卡屈服准则没有考虑静水压力的影响，因此与静水压力应力  $I_1$  无关。如图3.2.1所示，特雷斯卡屈服面在主应力空间上的形状为与静水压力轴平行的正六面体柱面，偏差平面上的形状如图3.2.2(a)所示为正六边形。

将特雷斯卡屈服准则用于岩土有很多缺陷，首先其剪切强度与静水压力无关的假设与岩土的特性不符；其次，该屈服准则假设抗压和抗拉强度相同也与岩土的特性不符；第三，该准则没有考虑第二主应力的影响。

但是，在饱和土在不排水条件下进行全应力分析时(该分析类型被称为  $\phi=0$  分析)，使用特雷斯卡屈服准则也能获得较为满意的结果。这是因为由试验结果可知，不排水条件下饱和土的剪切刚度与静水压应力(平均应力)成分( $I_1$ )无关，因此也可以使用特雷斯卡屈服准则模拟。此时，常数  $k$  表示为不排水剪切强度  $c_u(\phi_u=0)$ ，该值需要通过非固结不排水三轴压缩试验获得。

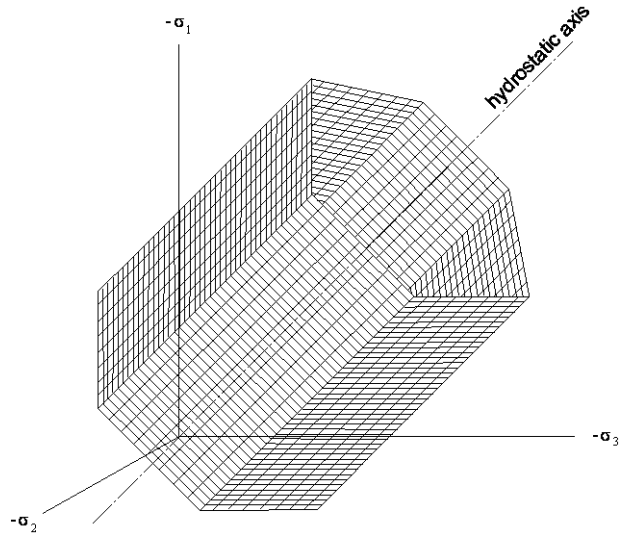
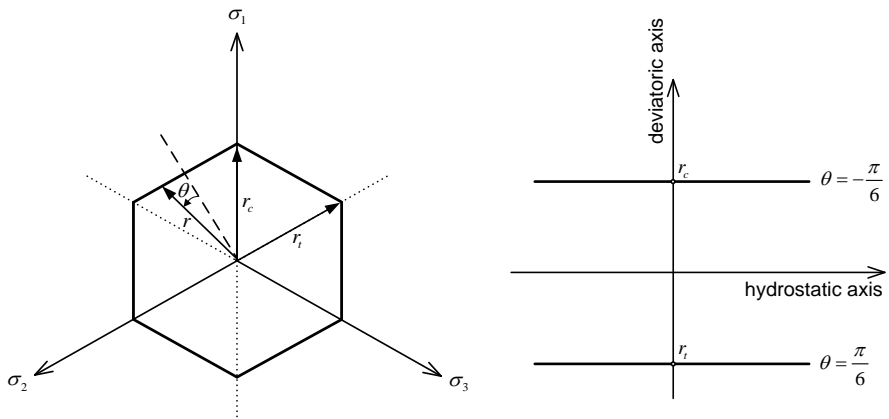


图 3.2.1 主应力空间上的特雷斯卡屈服面形状



(a)  $\pi$  平面上的屈服面形状

(b) 在  $\theta = -\frac{\pi}{6}$  子午平面上的屈服面形状

图 3.2.2  $\pi$  平面和子午平面上的特雷斯卡屈服面形状

## 3.3 范梅塞斯模型

### 3.3.1 概要

范梅塞斯模型以正八面体剪切应力  $\tau_{oct}$  达到极限为屈服破坏基准，同特雷斯卡模型一样一般用于模拟钢材等延性材料，在SoilWorks中可以用于模拟锚、岩石锚杆、土钉、桩等单元的材料特性。

### 3.3.2 材料参数

范梅塞斯模型需要输入的材料参数如下表所示。

表3.3.1 范梅塞斯模型的材料参数

材料参数	说明
屈服应力( $\sigma_y$ )	单轴抗压强度

### 3.3.3 屈服函数

范梅塞斯模型的屈服函数可使用单轴强度表示如下。

$$f(J_2) = \sqrt{3J_2} - \sigma_y = 0 \quad (3.3.1)$$

如图3.3.1所示，在主应力空间上范梅塞斯屈服面形状为与静水压力轴平行的圆柱面。将范梅塞斯和特雷斯卡的受拉和受压方向的子午线重叠时，在偏差平面上范梅塞斯屈服面是特雷斯卡六边形屈服面的外接圆(参见图3.3.2(a))。二者最大的破坏应力差发生在简单剪切子午线( $\theta_0 = 30^\circ$ )上，此时范梅塞斯屈服剪应力与特雷斯卡屈服剪应力的比值为  $2/\sqrt{3} = 1.15$ 。如果使二者在简单剪切上一致(即  $k$  值相同)时，范梅塞斯屈服圆为特雷斯卡六边形屈服面的内接圆，二者最大剪切应力差发生在受压子午线( $\theta_0 = 0^\circ$ )和受拉子午线( $\theta_0 = 60^\circ$ )上。

范梅塞斯屈服准则与特雷斯卡屈服准则一样不适合常规的岩土分析，但是可以用于模拟饱和土在不排水条件下的岩土分析，且可避免特雷斯卡屈服标准在六边形角点上计算难点和计算

误差。

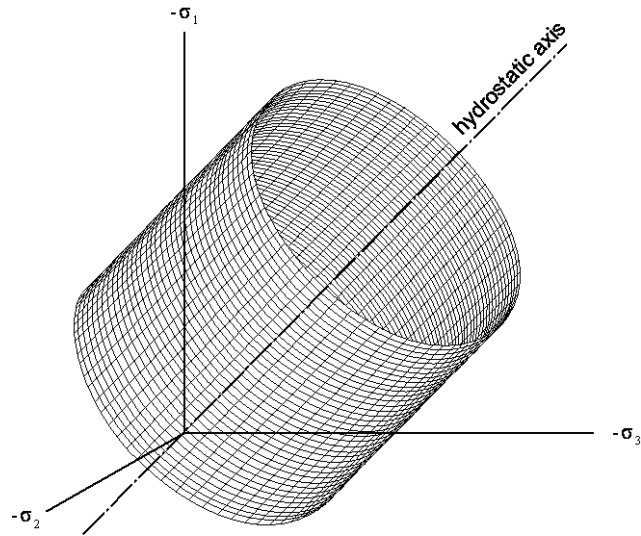
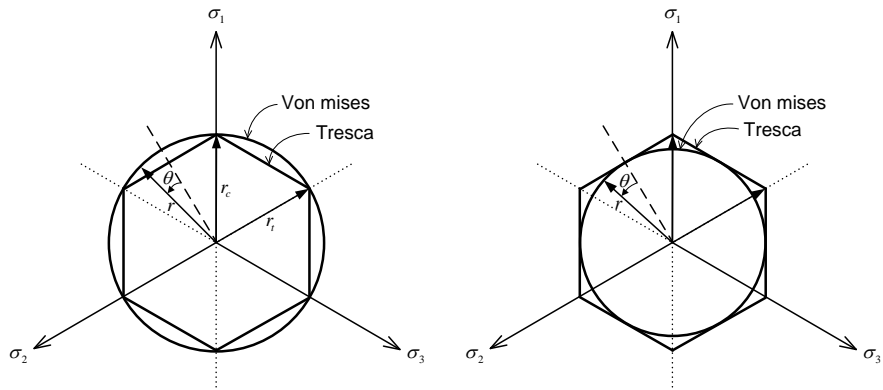


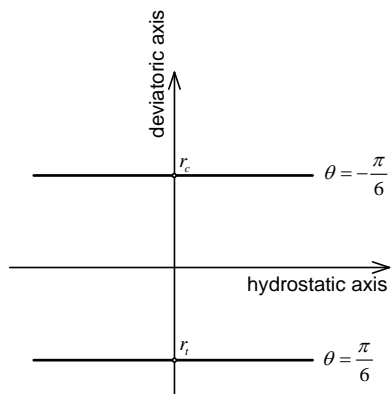
图 3.3.1 主应力空间上的范梅塞斯屈服面形状



(a)  $\pi$  平面上外接特雷斯卡六边形

(b) 在  $\pi$  平面上内接特雷斯卡六边形





(c) 在  $\theta = -\frac{\pi}{6}$  子午平面上的屈服面形状

图 3.3.2 在  $\pi$  平面和子午平面上的范梅塞斯屈服面形状

## 3.4 莫尔-库伦模型

### 3.4.1 概要

莫尔-库伦模型一般用于模拟岩土材料，如下图所示显示为理想弹塑性特性。

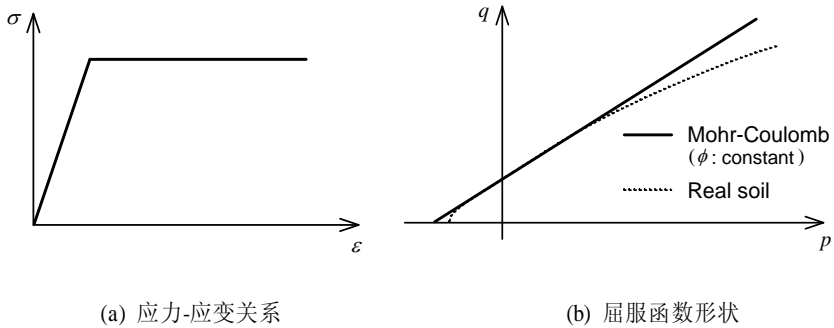


图 3.4.1 莫尔-库伦模型的材料特性和屈服函数

莫尔-库伦屈服准则在模拟土的材料特性时有两个缺陷。第一个缺陷是假设第二主应力对屈服没有影响，这与实际试验结果不符。第二个缺陷是莫尔圆的子午线和屈服包络线为直线，其强度参数  $\phi$  不随约束压力(或静水压力)而变(参见图3.4.1(b))。因此该本构模型在约束压力变化不大时较为准确，但是当约束压力变化较大时准确性有所降低。另外，破坏面有拐角，所以数值分析时会有误差。

由于莫尔-库伦模型定义参数比较方便，所以在岩土分析中使用比较多。

### 3.4.2 材料参数

莫尔-库伦模型需要输入的材料参数参见如下表格。

表3.4.1 莫尔-库伦模型的材料参数

材料参数	说明
弹性模量的增量( $E_{inc}$ )	随高度变化的弹性模量的增量
粘聚力增量( $c_{inc}$ )	随高度变化的粘聚力增量
参考高度( $y_{ref}$ )	基准高度
膨胀角( $\psi$ )	膨胀角
抗拉强度( $\sigma_t$ )	抗拉强度

SoilWorks的莫尔-库伦模型中可以考虑随高度变化的弹性模量和粘聚力。弹性模量的变化可参考3.1节的说明，粘聚力随高度变化的公式如下。

$$\begin{aligned}
 c &= c_{ref} + (y_{ref} - y)c_{inc} & (y \leq y_{ref}) \\
 c &= c_{ref} & (y > y_{ref})
 \end{aligned}
 \tag{3.4.1}$$

其中，

$c_{ref}$  : 输入的参考位置的粘聚力

$c_{inc}$  : 粘聚力随深度的增加量

$y_{ref}$  :  $c_{ref}$  值的深度(参考位置)

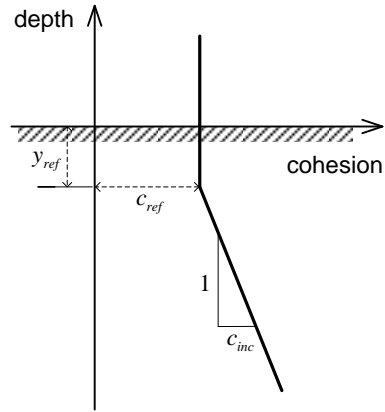


图 3.4.2 粘聚力随深度变化的示意图

当计算位置高于参考位置  $y_{ref}$  时，粘聚力有可能小于0，此时粘聚力取  $c_{ref}$  值。

### 3.4.3 屈服函数

莫尔(1900)提出的屈服准则公式如下。

$$|\tau| = f(\sigma) \quad (3.4.2)$$

其中任意平面上的极限剪切应力  $\tau$  只与同一平面上的法向应力  $\sigma$  相关，公式(3.4.2)表现的破坏包络线  $f(\sigma)$  可由试验获得。莫尔认为材料的破坏发生在最大的莫尔圆与破坏包络线相切时，且第二主应力  $\sigma_2 (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$  对破坏条件没有影响。

库伦屈服面的最简单的形状为直线，该直线的屈服函数如下。

$$|\tau| = c + \sigma \tan \phi \quad (3.4.3)$$

其中，

$c$  : 粘聚力

$\phi$  : 内摩擦角

公式(3.4.3)的破坏准则称为莫尔-库伦准则，因其简单方便被广泛应用于岩土分析中。

将公式(3.4.3)用主应力可表示如下。

$$\sigma_1 \frac{(1 - \sin \phi)}{2c \cos \phi} - \sigma_3 \frac{(1 + \sin \phi)}{2c \cos \phi} = 1 \quad (3.4.4)$$

用应力不变量、偏量不变量可表示如下。

$$f(I_1, J_2, \theta) = -\frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \left( \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cos \phi = 0 \quad (3.4.5)$$

用不变量  $\xi$ ,  $\rho$  和  $\theta_0$  表示如下。

$$\begin{aligned} f(\xi, \rho, \theta_0) = & -\sqrt{2}\xi \sin \phi + \sqrt{3}\rho \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) \\ & - \rho \cos \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - \sqrt{6}c \cos \phi = 0 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

塑性势能函数参考公式(3.4.5)可表示如下。

$$g(I_1, J_2, \theta) = -\frac{1}{3} I_1 \sin \psi + \sqrt{J_2} \left( \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \psi \right) - c \cos \psi = 0 \quad (3.4.7)$$

如图3.4.3所示，在主应力空间上莫尔-库伦屈服面在  $\pi$  平面上为不规则六边形，子午线形状为直线。绘制不规则六边形需要  $\rho_{10}$  和  $\rho_{c0}$ ，可通过将  $(\xi=0, \rho=\rho_{10}, \theta_0=60^\circ)$  和  $(\xi=0, \rho=\rho_{c0}, \theta_0=0^\circ)$  代入公式(3.4.6)计算。

$$\rho_{10} = \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi}{3 + \sin \phi} \quad (3.4.8)$$

$$\rho_{c0} = \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi}{3 - \sin \phi} \quad (3.4.9)$$

由公式(3.4.8)和(3.4.9)可获得  $\rho_{t0} / \rho_{c0}$  比值如下。

$$\frac{\rho_{t0}}{\rho_{c0}} = \frac{3 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \quad (3.4.10)$$

因为各偏差平面形状几何相似，所以各偏差平面的  $\rho_t / \rho_c$  比值为常量。

$$\frac{\rho_t}{\rho_c} = \frac{\rho_{t0}}{\rho_{c0}} = \frac{3 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \quad (3.4.11)$$

材料参数中输入的抗拉强度为土的极限抗拉强度，称为拉力截断(受拉-cutoff)。

在 SoilWorks 中将郎肯(Rankine)的屈服准则用于土体的受拉特性模拟中与莫尔-库伦准则混合使用。

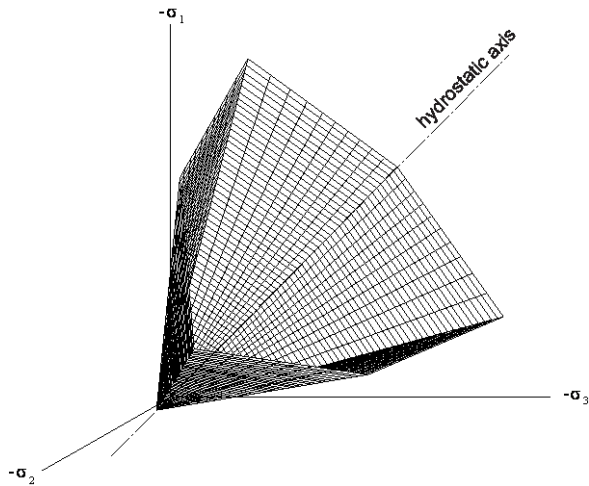
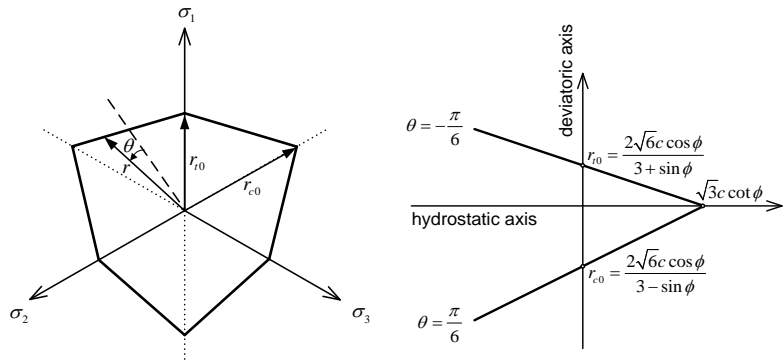


图 3.4.3 主应力空间上的莫尔-库伦屈服面形状



(a)  $\pi$  平面上的屈服面形状

(b)  $\theta = -\frac{\pi}{6}$  的子午面上的屈服面形状

图 3.4.4  $\pi$  平面和子午面上的莫尔-库伦屈服面形状

## 3.5 德鲁克-普拉格模型

### 3.5.1 概要

德鲁克-普拉格模型是德鲁克和普拉格在1952年为了解决莫尔-库伦模型在拐点位置的数值分析的问题而提出的模型。该模型在范梅塞斯模型基础上将应力偏量扩展为等压轴的函数，因此也被称为扩展范梅塞斯模型(Extended von Mises)。

### 3.5.2 材料参数

德鲁克-普拉格模型中需要输入的参数见下表。

表3.5.1 德鲁克-普拉格模型的材料参数

材料参数	说明
弹性模量增量( $E_{inc}$ )	弹性模量随深度的增加量
粘聚力增量( $c_{inc}$ )	粘聚力随深度的增加量
参考高度( $y_{ref}$ )	基准高度

德鲁克-普拉格模型也可以考虑弹性模量和粘聚力随深度的变化特性，方法同莫尔-库伦模型。

### 3.5.3 屈服函数

将德鲁克-普拉格屈服准则可用应力不变量和应力偏量表现如下。

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k = 0 \quad (3.5.1)$$

使用  $\xi = I_1 / \sqrt{3}$  和  $\rho = \sqrt{2J_2}$  可将上式整理如下。

$$f(\xi, \rho) = \rho - \sqrt{6}\alpha\xi - \sqrt{2}k = 0 \quad (3.5.2)$$



其中  $\alpha$  和  $k$  为材料常数，可通过试验获得。当  $\alpha$  为零时，公式(3.5.2)与范梅塞斯屈服准则相同。另外，材料常数  $\alpha$  和  $k$  也可以用莫尔-库伦屈服准则的常数  $c$  和  $\phi$  描述。

如图3.5.1所示，在主应力空间上德鲁克-普拉格的屈服面是以静水压力轴为对称轴的圆锥形。

德鲁克-普拉格屈服准则的优点是仅包含两个参数( $\alpha$  和  $k$ )，两个参数可通过常规的三轴试验获得，因此屈服准则相对比较简单。另外，德鲁克-普拉格可以考虑静水压力的影响。但是在子午平面上的破坏面为直线，因此对于具有在子午平面上屈服面为曲线特性的岩土不是很适合。

德鲁克-普拉格和莫尔-库伦屈服准则的材料常数之间的关系，与将莫尔-库伦的六边形与德鲁克-普拉格的圆锥面一致的方法相关。例如将两个曲面沿着  $\theta_0 = 0^\circ$  的受压子午线  $\rho_c$  一致时圆锥外接于六边形，两个屈服准则的材料常数的关系如下。

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (3.5.3)$$

沿着  $\theta_0 = 60^\circ$  的受拉子午线  $\rho_t$  一致时，圆锥内接于六边形，两个屈服准则的材料常数的关系如下。

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}, \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (3.5.4)$$

不同的一致条件会得到不同的相关公式。

另外，在平面应变问题中，两个屈服准则会得到相同的极限荷载(参考e.g., Chen)。此时决定常数  $\alpha$  和  $k$  需要下面两个条件。

- ✓ 平面应变的变形条件
- ✓ 单位体积的能量耗散速度条件

基于上面两个条件可获得两个屈服准则的材料常数间关系公式如下(Drucker and Prager, 1952)。

$$\alpha = \frac{\tan \phi}{(9 + 12 \tan^2 \phi)^{1/2}}, \quad k = \frac{3c}{(9 + 12 \tan^2 \phi)^{1/2}} \quad (3.5.5)$$

平面应变问题中使用公式(3.5.5)时，屈服准则公式(3.5.1)与莫尔-库伦的公式(3.4.3)相同。

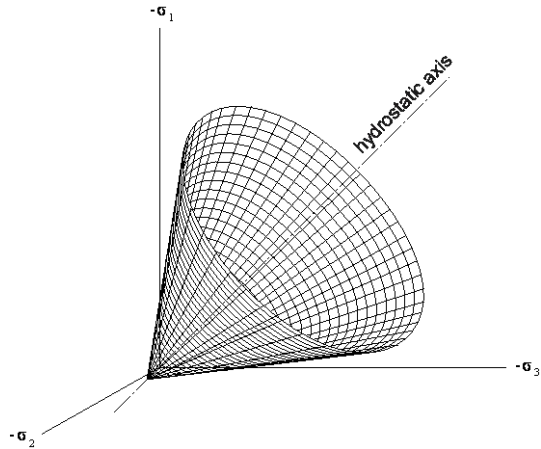
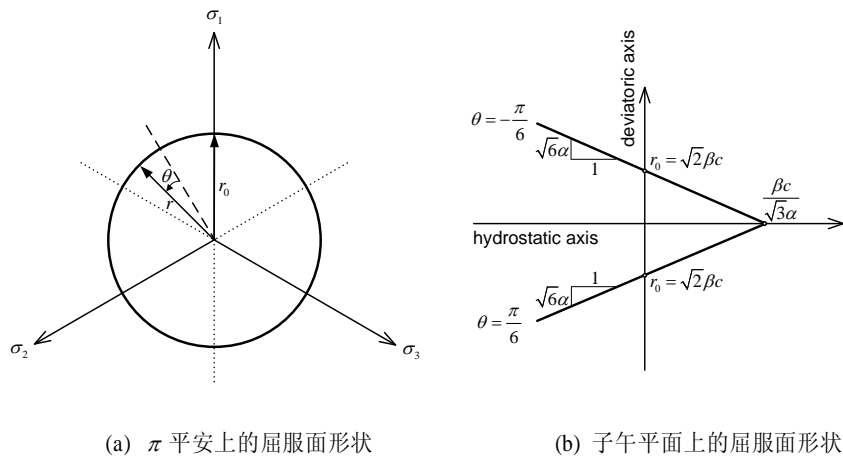


图 3.5.1 主应力空间上德鲁克-普拉格屈服面形状



(a)  $\pi$  平面上的屈服面形状

(b) 子午平面上的屈服面形状

图 3.5.2  $\pi$  平面和子午面上的德鲁克-普拉格屈服面形状

## 3.6 双曲线模型(邓肯-张模型)

### 3.6.1 概要

岩土在接近破坏的区段非线性特性非常明显，其中包括弹性模量的非线性特性。在SoilWorks中弹性模量使用邓肯和张在1970年建议的公式，在该公式中应力-应变关系为双曲线，弹性模量为约束应力(confining stress)和剪切应力的函数。因为该模型中的材料参数可从三轴抗压试验获得，因此该模型的应用也较为广泛。

邓肯-张模型的应力-应变关系在剪切应力 ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) 和轴向应变的坐标空间上表现为双曲线形状，其应力状态和应力路径需要三个参数来描述，即初始切线模量 ( $E_i$ )、切线模量 ( $E_t$ )、卸载-重新加载模量 ( $E_{ur}$ ) (参见图3.6.1)。

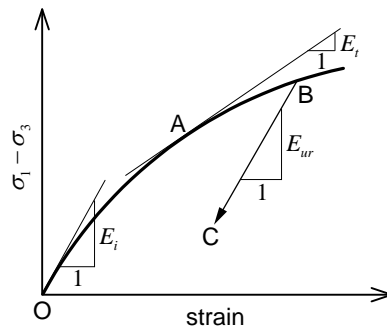


图 3.6.1 非线性应力-应变特性

### 3.6.2 材料参数

双曲线模型需要输入的材料参数如下表所示。

表3.6.1 双曲线模型的材料参数

材料参数	说明
泊松比( $\nu$ )	$K_b$ 为0时使用的常数
粘聚力( $c$ )	粘聚力
摩擦角( $\phi$ )	内摩擦角
初始弹性模量( $K$ )	初始加载时的切线模量
指数( $n$ )	计算初始刚度用的指数
破坏比( $R_f$ )	破坏比
$K_{ur}$	卸载-重新加载模量
$K_b$	体积模量号
指数( $m$ )	计算体积模量用的指数
最小切线模量	最小切线模量
最小约束应力( $\sigma_{\min}$ )	最小约束应力
大气压( $P_a$ )	大气压

非线性模型的模量和指数可通过将三轴抗压试验结果获得的  $E/p_a$  (或  $B_m/p_a$ ) 作为竖轴，将  $\sigma_3/p_a$  作为横轴，刻度取对数刻度绘制试验曲线获得。如图3.6.2所示，当竖轴为  $E/p_a$  时，可用  $\sigma_3/p_a = 1$  的点的函数值计算初始加载时的切线模量  $K$ ，曲线的斜率即为计算初始刚度用的指数  $n$ ；当竖轴为  $B_m/p_a$  时，曲线的斜率即为计算体积模量用的指数  $m$ 。

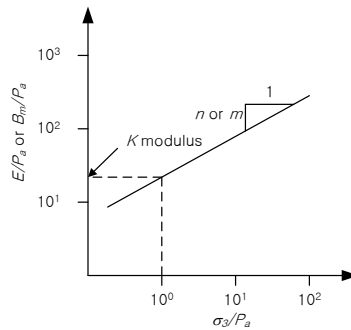


图 3.6.2 计算非线性岩土特性的示意图

体积模量  $B_m$  的计算公式如下。

$$B_m = \frac{(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3)/3}{\Delta\varepsilon_v} \quad (3.6.1)$$

其中，

$\Delta\sigma$  : 主应力的变化量  
 $\Delta\varepsilon_v$  : 体积应变的变化量

### 3.6.3 初始切线模量

岩土的剪切应力为零时，将使用初始模量  $E_i$ ，初始模量的计算公式如下。

$$E_i = K_L p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (3.6.2)$$

其中，

$E_i$  : 初始模量  
 $K_L$  : 加载模量  
 $p_a$  : 大气压(用于归一化)  
 $\sigma_3$  : 约束应力  
 $n$  : 计算约束应力对初始模量的影响用的指数

当指数  $n$  为1.0时，初始切线模量  $E_i$  与约束应力成正比；如果指数为零，则初始切线模量  $E_i$  与约束应力无关。

当约束应力为零或负值(受拉)时，初始切线模量为零或有可能为负值。为了避免出现这样的问题，在SoilWorks中要求输入最小约束应力(下限值)，其值默认取  $0.01p_a$ 。

### 3.6.4 切线模量

当岩土承受的剪切应力大于过去的剪切应力时，岩土的状态将沿着加载路径变化，加载路径的特性受的切线模量  $E_t$  控制。在邓肯-张模型中加载路径切线模量用岩土材料特性、三轴应力偏量  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 、约束应力  $(\sigma_3)$  表达如下。

$$E_t = \left[ 1 - \frac{R_f (\sigma_1 - \sigma_3) (1 - \sin \phi)}{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi} \right]^2 E_i \quad (3.6.3)$$

其中，

- $E_t$  : 切线模量
- $E_i$  : 初始切线模量
- $\phi$  : 岩土的内摩擦角
- $c$  : 岩土的粘聚力
- $R_f$  : 双曲线的渐近线与最大剪切强度的比(一般取0.75 ~ 1)

其中，将限制  $E_t$  的最小值，最小切线模量的默认值取  $p_a$ ，因为该值过小时不容易收敛。

### 3.6.5 卸载-重新加载模量

岩土在较大剪切应力状态下卸载时，非线性模型使用卸载-重新加载模量  $E_{ur}$ 。该模量的计算公式如下。

$$E_{ur} = K_{ur} p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (3.6.4)$$

与初始斜线模量不同的是该模量不受剪切应力状态的影响。

当没有定义卸载-重新加载模量  $K_{ur}$  时，将使用与加载模量  $K_L$  相同的值。

### 3.6.6 泊松比

非线性模型的泊松比或为常数或用下列公式计算。

$$B_m = K_b p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (3.6.5)$$

其中,

- $B_m$  : 体积模量(bulk modulus),  
 $K_b$  : 体积模量号,  
 $m$  : 体积模量指数

泊松比与体积模量的关系可使用弹性理论定义如下。

$$B_m = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3.6.6)$$

当泊松比为零时,  $B_m = E/3$ ; 当泊松比为0.49时,  $B_m = 17E$ 。程序中可使用的泊松比范围为0~0.49。

### 3.6.7 屈服区域

非线性弹性模型不能定义屈服条件, 但是可以显示剪切应力大于某值的区域, 并且将这样的区域称为屈服区域, 屈服区域的条件如下。

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi \geq R_f c \cos \phi \quad (3.6.7)$$

在邓肯-张公式中的破坏比  $R_f$  (弹性 ratio)用于下面公式。

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (3.6.8)$$

极限强度  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  为双曲线在较大应变一侧的渐近线,  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$  为破坏时的应力偏量。

在莫尔圆中可得下面公式。

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}{2} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)_{ult}}{2} \sin \phi = c \cos \phi \quad (3.6.9)$$

上式中乘以  $R_f$  后代入前面公式可得如下公式。

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)_f}{2} \sin \phi = R_f c \cos \phi \quad (3.6.10)$$

比较公式(3.6.7)和(3.6.10)可知，公式(3.6.7)表示的是应力状态接近破坏状态的指标。



## 3.7 霍克-布朗模型

### 3.7.1 概要

霍克和布朗在1980年为了说明节理岩体破坏时的应力减少现象提出了等效连续体的概念。霍克和布朗给出了区分完整岩石和破裂岩石的破坏函数，当岩石发生破坏时通过减少特征系数来模拟应力减小现象。霍克和布朗推荐的方法解决了莫尔-库伦方法中不能考虑岩石的单轴抗压强度的影响问题，可以更准确的模拟岩石的特性，因此霍克-布朗模型被广泛应用于岩石分析中。

### 3.7.2 材料参数

霍克-布朗模型中需要输入的材料参数如下表所示。

表3.7.1 霍克-布朗模型的材料参数

材料参数	说明
初始 m	完整状态下的初始m值
初始 s	岩石状态下的初始s值
残留 m	破裂状态下的m值
残留 s	破裂状态下的s值
单轴抗压强度	岩石的单轴抗压强度

### 3.7.3 屈服函数

霍克-布朗模型的屈服函数如下，该屈服准则没有考虑第二主应力的影响。

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{m\sigma_c\sigma_3 + s\sigma_c^2} \quad (3.7.1)$$

其中， $\sigma_c$ 为单轴抗压强度， $m$ 和 $s$ 为与岩石性质和破碎程度有关的材料常数。

将上式用应力不变量表示如下。

$$F_{HB} = 4J_2 \cos^2 \theta + m\sigma_c \sqrt{2} \left( \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} + \cos \theta \right) + m\sigma_c \frac{I_1}{3} - s\sigma_c^2 = 0 \quad (3.7.2)$$

其中， $I_1$  为应力张量第一不变量、 $J_2$  为应力偏量第二不变量， $\sigma_c$  为岩石的单轴抗压强度，且有  $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$ 。

在主应力空间上霍克-布朗模型的形状为以等压轴为对称轴的子弹形状(参见图3.7.1)，在偏差平面上由六个曲线边构成的六边形。曲线相交的地方因为会形成角，因此在数值计算中会产生误差，为了减少这样的误差，在SoilWorks中使用了Wan(1994)推荐的修正的霍克-布朗屈服准则。

$$F = q^2 g^2(\theta) + \sigma_c^* q g(\theta) + 3\sigma_c^* p - s\sigma_c^2 = 0 \quad (3.7.3)$$

其中， $\sigma_c^* = m\sigma_c/3$ 、 $q = \sqrt{3J_2}$ 、 $p = I_1/3$ ，偏差平面形状函数  $g(\theta)$  如下。

$$g(\theta) = \frac{4(1-e^2)\cos^2(\pi/6+\theta) + (1-2e)^2}{2(1-e^2)\cos^2(\pi/6+\theta) + (2e-1)D} \quad (3.7.4)$$

其中， $D = \sqrt{4(1-e^2)\cos^2(\pi/6+\theta) + 5e^2 - 4e}$ 。

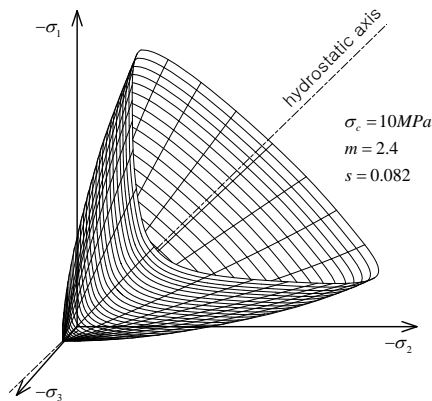


图 3.7.1 霍克-布朗屈服面形状

## 3.8 修正剑桥-粘土模型

### 3.8.1 概要

修正剑桥-粘土模型是阿特金森和布兰兹比(Atkinson and Brandsby (1978))、布里托和岗恩(Britto and Gunn (1987))提出的弹塑性模型，公式中的应力使用有效应力因子。

图3.81.1为体积变化量与压力的关系曲线，包含了正常固结线和超固结线，超固结线又称为膨胀线(dwelling line)。应力增加时应力状态将沿着超固结线移动到正常固结线，即通过两条线交叉点后应力状态将沿着正常固结线向下移动。

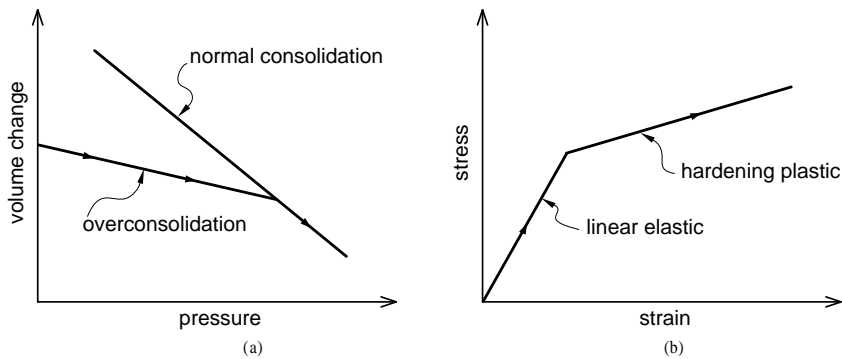


图 3.8.1 体积-压力和应力-应变关系的相似性

图3.8.1(a)沿着逆时针方向旋转90° 时与图3.8.1(b)相似，即超固结线与应力-应变关系的弹性区段类似，正常固结线与应力-应变关系的塑性硬化区段类似。

### 3.8.2 材料参数

修正剑桥-粘土模型需要输入的材料参数见下表。

表3.8.1 修正剑桥-粘土模型的材料参数

材料参数	说明
超固结率(OCR)	超固结率
固结线斜率( $\lambda$ )	固结线的斜率
超固结线斜率( $\kappa$ )	超固结线的斜率
临界比容( $\Gamma$ )	$p'$ 为1时的比容
极限状态线的斜率( $M$ )	极限状态线的斜率
$p'_c$	先期固结压力

超固结率OCR可通过分析岩土勘察资料、文献、相邻工程案例获得。正常固结分析时该值为1。其他参数 $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\Gamma$ ,  $M$ 的说明参见图3.8.2,  $M$  值为将图3.8.2(a)的临界状态线投影到图3.8.2(b)的  $p'-q$  平面上的直线的斜率。

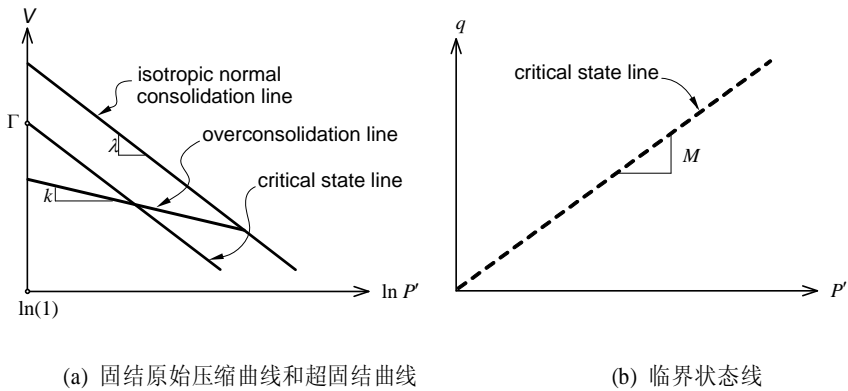


图 3.8.2 确定修正剑桥-粘土材料特性示意图

岩土竖向压力作用下的压缩特征值可通过一维压缩试验获得，由孔隙率( $e$ )与 $\log_{10}(p)$ 的图形可获得压缩指数 $C_c$ 和重新压缩指数 $C_s$ 。压缩指数和重新压缩指数与 $\lambda, \kappa$ 的关系见下面公式。

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{C_c}{2.303} \\ \kappa &= \frac{C_s}{2.303}\end{aligned}\quad (3.8.1)$$

另外， $\lambda$  和  $\kappa$  也可以用孔隙率与  $\ln(p)$  的图形推导。

修正剑桥-粘土的基本方程是由单位为kN-m的试验值推导出来的，因此压缩指数和再压缩指数的单位应为kN-m，即在程序中输入该值时应将单位系设置为kN-m。

因子  $N$  可将正常固结线投影在比容  $V$  与  $\ln(p)$  图形上的  $p$  为1.0的垂直线上获得，通过  $N$  可按下式获得临界比容  $\Gamma$ 。

$$\Gamma = N - (\lambda - \kappa) \ln 2 \quad (3.8.2)$$

即临界比容  $\Gamma$  如图3.8.2(a)所示为临界状态线与  $p = 1.0$  时的函数线的交点。

极限状态线的斜率  $M$  可由三轴压缩试验获得的有效内摩擦角  $\phi'$  按如下公式计算。

$$M = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \quad (3.8.3)$$

在SoilWorks中先期固结压力  $p'_c$  可以自动计算也可以由用户输入。自动计算方法可参考公式(3.8.16)的说明；用户手动输入时，数值应尽量不小于公式(3.8.16)所计算的值，这样才能保证收敛的稳定性。

修正剑桥-粘土模型模型需要当前的初始应力状态和初始屈服面信息。初始应力状态可由程序中输入，初始屈服面可由先期固结压力  $p'_c$  或者由超固结率OCR和初始应力状态计算  $p'_c$  获得，方法参见第3.8.4章节。

### 3.8.3 屈服函数

修正剑桥-粘土模型的屈服曲线如图3.8.3所示为椭圆形。

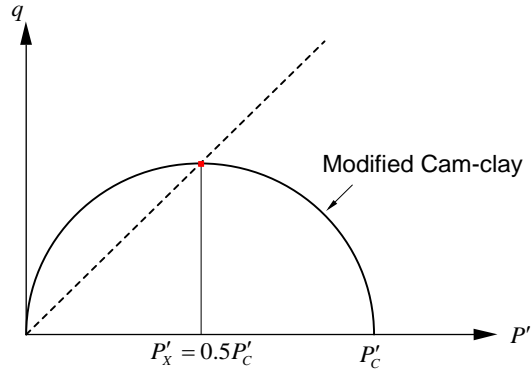


图 3.8.3 修正剑桥-粘土模型的屈服函数

修正剑桥-粘土模型的屈服函数公式如下。

$$q^2 = M^2 p'_x p'_c - M^2 p'^2 \quad (3.8.4)$$

其中  $p'_c$  为先期固结压力。

临界状态的剪切应力  $q$  可由最大平均应力  $p'_x$  按如下公式计算。

$$q = Mp'_x \quad (3.8.5)$$

且对修正的屈服函数有如下公式。

$$p'_c = 2p'_x \quad (3.8.6)$$

因此修正剑桥-粘土模型的屈服函数  $F$  如下。

$$F = \frac{q^2}{p'} + M^2 p' - 2M^2 p'_x \quad (3.8.7)$$

其中,

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{I'_1}{3} \\ q &= \sqrt{3J_2} \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

如图3.8.4所示, 特征超固结线在临界状态的比容  $V_x$  可按下面公式计算。

$$V_x = V_0 + \kappa \ln p'_0 - \kappa \ln p'_x \quad (3.8.9)$$

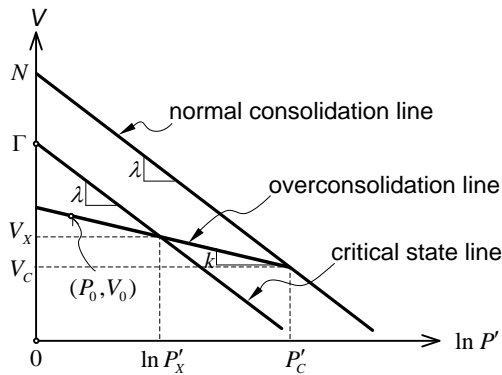


图 3.8.4 修正剑桥-粘土模型的岩土材料特性的定义

由临界状态线计算的比容  $V_x$  如下。

$$V_x = \Gamma - \lambda \ln p'_x \quad (3.8.10)$$

由上面两个公式可获得最大平均应力  $p'_x$  计算公式如下。

$$p'_x = \exp\left(\frac{\Gamma - V_0 - \kappa \ln p'}{\lambda - \kappa}\right) \quad (3.8.11)$$

### 3.8.4 初始条件

初始条件由初始应力和初始比容  $V_0$  决定。修正剑桥-粘土模型中需要定义初始应力，而计算初始比容  $V_0$  需要初始先期固结压力(pre-consolidation pressure)  $p'_c$ ，初始比容和初始先期固结压力的关系参见图3.8.4。

先期固结荷载既可以由用户直接输入，也可以由初始地应力(in-situ stresses)、超固结率(over-consolidation ratio ; OCR)、静止土压力系数  $K_0$  自动计算。初始应力状态表示如下。

$$\{\sigma'_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma'_{x0} \\ \sigma'_{y0} \\ \sigma'_{z0} \\ \tau_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (3.8.12)$$

岩土受到的最大竖向应力可通过固结仪试验获得。过去的最大竖向应力  $\sigma'_{v\max}$  与当前竖向应力  $\sigma'_v$  的比称为超固结率(over-consolidation ratio ; OCR)，超固结率由用户输入。最大竖向应力  $\sigma'_{v\max}$  和最大水平应力  $\sigma'_{h\max}$  的关系近似如下。

$$\begin{aligned} K_0 &= 1 - \sin \phi' \\ \sigma'_{h\max} &= K_0 \sigma'_{v\max} \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

假设剪切应力为零，则最大应力向量  $\sigma'_{\max}$  可表示如下。

$$\sigma'_{\max} = \begin{Bmatrix} \sigma'_{x\max} \\ \sigma'_{y\max} \\ \sigma'_{z\max} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma'_{y0} K_0 (\text{OCR}) \\ \sigma'_{y0} (\text{OCR}) \\ \sigma'_{y0} K_0 (\text{OCR}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8.14)$$

过去历程中的最大平均应力  $p'_{\max}$  与最大剪切应力  $q_{\max}$  如下。



$$\begin{aligned}
 p'_m &= \frac{1}{3}(\sigma'_{x\max} + \sigma'_{y\max} + \sigma'_{z\max}) \\
 q'_m &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma'_{x\max} - \sigma'_{y\max})^2 + (\sigma'_{y\max} - \sigma'_{z\max})^2 + (\sigma'_{z\max} - \sigma'_{x\max})^2}
 \end{aligned} \tag{3.8.15}$$

先期固结压力  $p'_c$  可将公式(3.8.15)代入屈服函数公式(3.8.4)得如下公式。

$$p'_c = \frac{1}{M^2 p_{\max}^2} (q_{\max}^2 + M^2 p_{\max}^2) \tag{3.8.16}$$

得到先期固结荷载  $p'_c$  后即可计算初始比容  $V_0$ ，计算过程如下。首先计算正常固结线  $N$  与垂直轴的交点(即  $\ln p' = 0$  的点)值如下。

$$N = \Gamma + (\lambda - \kappa) \ln 2 \tag{3.8.17}$$

然后由通过固结荷载  $p'_c$  的正常固结线计算临界状态的比容如下。

$$v_c = N - \lambda \ln p'_c \tag{3.8.18}$$

最后由通过先期固结压力荷载的超固结线可得初始比容  $V_0$  如下。

$$v_0 = v_c + \kappa \ln \left( \frac{p'_c}{p'_0} \right) \tag{3.8.19}$$

其中，初始平均应力  $p'_0$  可由初始应力计算如下。

$$p'_0 = \frac{1}{3}(\sigma'_{x0} + \sigma'_{y0} + \sigma'_{z0}) \tag{3.8.20}$$

### 3.9 D-min 模型(日本电力中央研究所模型)

#### 3.9.1 概要

本模型一般用于岩石(硬岩、软岩等)的分析中,本模型假定各施工阶段的刚度不同,但各施工阶段内的刚度不变,并假定莫尔圆接近破坏包络线时由于岩石内部结合状态的松弛引起弹性模量减小、泊松比增大。弹性模量和泊松比值由莫尔圆和破坏包络线的距离比决定,不同施工阶段的数值不同,但同一施工阶段内的数值不变。

破坏包络线公式如下。

$$\left(\frac{\tau}{\tau_R}\right)^a = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_t} \quad (3.9.1)$$

其中,  $\sigma$  为静水应力(hydrostatic stress)、 $\tau$  为剪切应力。 $a$ 、 $\sigma_t$ 、 $\tau_R$  是由用户输入的值,其中  $a$  为莫尔圆系数、 $\sigma_t$  为抗拉强度、 $\tau_R$  为抗剪强度。

破坏包络线和莫尔圆之间的关系如下图所示。

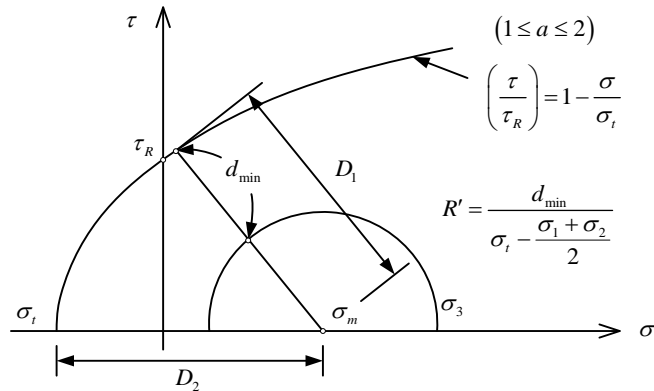


图3.9.1 D-min模型的破坏包络线和莫尔圆

如图3.9.1所示,使用松弛系数( $R$ )判断是否破坏,松弛系数大于1表示为弹性,小于0表示发生

破坏。

$$R = k \cdot R' \quad (0.0 \leq R \leq 1.0) \quad (3.9.2)$$

其中,

$$R' = \frac{d_{\min}}{\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}$$

此时,  $d_{\min}$  为破坏包络线和莫尔圆之间的最短距离,  $k$  为用户输入的松弛系数。

安全度( $F_s$ )如下。

$$F_s = \frac{\min(D_1, D_2)}{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)} \quad (3.9.3)$$

松弛系数的计算位置为积分点位置, 使用松弛系数计算下一阶段的弹性模量和泊松比。

$$\begin{aligned} E &= R^m (E_i - E_{cr}) + E_{cr} \\ \nu &= R^n (\nu_i - \nu_{cr}) + \nu_{cr} \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

此时,  $m$ 、 $n$ 、 $E_i$ 、 $E_{cr}$ 、 $\nu_i$ 、 $\nu_{cr}$  为材料参数,  $m$ 、 $n$  是非线性材料系数、 $E_i$ 、 $E_{cr}$  分别为初始弹性模量和极限弹性模量、 $\nu_i$ 、 $\nu_{cr}$  分别为初始泊松比和极限泊松比。

### 3.9.2 材料参数

D-min模型中需要输入的材料参数如下表所示。

表3.9.1 D-min模型的材料参数

材料参数	说明
初始弹性模量( $E_i$ )	初始弹性模量
极限弹性模量( $E_{cr}$ )	极限弹性模量
非线性特性系数( $m$ )	非线性材料系数
初始泊松比( $\nu_i$ )	初始泊松比
极限泊松比( $\nu_{cr}$ )	极限泊松比
非线性特性系数( $n$ )	非线性材料系数
抗剪强度( $\tau_R$ )	抗剪强度
抗拉强度( $\sigma_t$ )	抗拉强度
莫尔圆包络参数( $a$ )	莫尔圆系数
松弛系数( $k$ )	松弛系数

莫尔圆系数( $a$ )和松弛系数( $k$ )随着初始弹性模量( $E_i$ )的增加而增加,日本道路工团在1986年通过三轴压缩试验整理的各种岩石的莫尔圆系数( $a$ )、松弛系数( $k$ )、初始弹性模量( $E_i$ )之间的关系如下表所示。

表3.9.2 初始弹性模量对应的松弛系数和莫尔圆系数(日本道路工团)

初始弹性模量( $E_i$ $kgf/cm^2$ )	松弛系数( $k$ )	莫尔圆系数( $a$ )
$100 \leq E_i < 1,000$	2.0	1.0
$1,000 \leq E_i < 10,000$	4.0	2.0
$10,000 \leq E_i < 100,000$	6.0	3.0
$100,000 \leq E_i$	10.0	4.0

### 3.10 关口-太田模型(Sekiguchi-Ohta model)

### 3.10.1 概要

关口-太田(1977)<sup>1</sup>模型是将太田(1971)<sup>2</sup>模型使用柴田(1963)<sup>3</sup>的膨胀理论扩展而成，同剑桥-粘土模型一样用于模拟粘土，不仅可以模拟弹塑性特性，还可以模拟弹粘塑性特性，可用于固结分析中。在SoilWorks中还可以与其他材料本构一起使用，并可以用于各种单元中。

### 3.10.2 材料参数

#### 3.10.2.1 弹塑性模型材料参数

关口-太田模型的弹塑性材料参数见下表。

表3.10.1 关口-太田弹塑性模型的材料参数

材料参数	说明
超固结率(OCR)	超固结率
正常固结线斜率( $\lambda$ )	正常固结线斜率
超固结线斜率( $\kappa$ )	超固结线(膨胀线)斜率
膨胀系数( $D$ )	膨胀系数
先期固结静止土压力系数( $K_{0C}$ )	先期固结静止土压力系数

超固结率在分析正常固结状态时其值取1， $\lambda$ 、 $\kappa$ 值参见修正剑桥-粘土模型说明中对图3.8.2的说明。在修正剑桥-粘土模型中介绍过压缩指数和膨胀指数通过公式(3.8.1)使用 $\lambda = C_c / 2.303$ 、 $\kappa = C_r / 2.303$ 计算。另外 $\lambda$ 和 $\kappa$ 使用对孔隙率的 $\ln(p)$ 的图形计算。膨胀系数 $D$ 在保持等压 $p'$ 的情况下进行的三轴CD试验(三轴固结排水试验)获得，也可以按下面公式计算。

$$D = \frac{\lambda - \kappa}{M(1 - e_0)} \quad (3.10.1)$$

其中， $M$ 为极限状态线的斜率，可使用内摩擦角用公式(3.8.3)计算。先期固结静止土压力系

1 Sekiguchi, H, Ohta, H. (1977). Induced anisotropy and time dependency in clays. 9<sup>th</sup> ICSMFE, Tokyo, Constitutive equations of Soils, 17, 229-238

2 Ohta, H. (1971) Analysis of deformations of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankment, Dr.Eng. thesis, Kyoto University, Japan.

3 柴田徹：粘土のダイラタンシーについて，京都大学防災研究所年報6号，pp.128-134，1963

数  $K_{0c}$  可通过三轴  $K_0$  固结试验获得。

### 3.10.2.2 弹粘塑性模型材料参数

关口-太田模型需要输入的弹粘塑性材料参数见下表。

表3.10.2 关口-太田模型的弹粘塑性材料参数

材料参数	说明
次固结系数( $\alpha$ )	次固结系数
初始体积应变率( $\dot{v}_0$ )	初始体积应变率

次固结系数  $\alpha$  可通过固结仪试验获得。初始体积应变率  $\dot{v}_0$  为次固结开始时的体积应变率，可通过下面公式计算。

$$\dot{v}_0 = \frac{\alpha}{t_0} \quad (3.10.2)$$

其中  $t_0$  为主固结完成时的时间。

### 3.10.2.3 材料参数的自动计算功能

某些参数需要进行三轴试验获得，但是因为三轴试验相对复杂，因此在 Soilworks 中提供了通过一些比较容易获得的参数计算这些复杂参数的自动计算功能。如下面图10.1所示，点击“自动计算附加参数”按钮就会生成图10.2所示的参数。程序提供的自动计算附加参数的方法有“Karibe公式”和“经验公式”两种方法。

附加参数

自动计算附加参数

计算方法	Karibe
塑性指数(IP)	30
<input type="checkbox"/> 压缩指数(Cc)	0.3
<input type="checkbox"/> 膨胀指数(Cr)	0.03
排水距离(H)	1 m
超固结率(OCR)	1
常规固结线斜率( $\lambda$ )	0.3
超固结线斜率(K)	0.03
膨胀系数(D)	0.05
线性静止土压力系数(K0c)	1
次固结系数(a)	0.005
初始体应变比( $v_0$ )	1E-05 1/min

图 10.1 附加参数的输入窗口

附加参数

自动计算附加参数

计算方法	Karibe
塑性指数(IP)	30
<input type="checkbox"/> 压缩指数(Cc)	0.3
<input type="checkbox"/> 膨胀指数(Cr)	0.03
排水距离(H)	1 m
超固结率(OCR)	1
常规固结线斜率( $\lambda$ )	0.225
超固结线斜率(K)	0.03
膨胀系数(D)	0.064
线性静止土压力系数(K0c)	0.534
次固结系数(a)	0.111
初始体应变比( $v_0$ )	1.306E-06 1/min

图 10.2 选择自动计算方法后输出的参数

### Karibe公式

Karibe公式需要输入如下材料参数。

表3.10.3 Karibe公式需要输入的材料参数

材料参数	说明	使用模型
塑性指数( $I_p$ )	塑性指数	弹塑性、弹粘塑性
压缩指数( $C_c$ )	压缩指数(可不输入)	弹塑性、弹粘塑性
超固结线斜率( $\kappa$ )	超固结线(膨胀线)斜率	弹塑性、弹粘塑性
超固结率(OCR)	超固结率	弹塑性、弹粘塑性
排水距离( $H$ )	排水距离(cm)	弹粘塑性

使用上述参数计算的其他参数如下。

$$\lambda = 0.015 + 0.007I_p \quad (3.10.3)$$

$$K_{oc} = 1 - \sin\phi' \quad (3.10.4)$$

$$D = \frac{\lambda\Lambda}{M(1+e_0)} \quad (3.10.5)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_e}{1+e_0} \quad (3.10.6)$$

$$\dot{v}_0 = \frac{\alpha}{H^2 T_v (90\%) c_v} \quad (3.10.7)$$

上述公式中排水距离  $H$  的单位固定为cm，输入时要特别注意。另外，当用户直接输入压缩指数  $C_c$  时，公式(3.10.3)的  $\lambda$  使用下面公式计算。

$$\lambda = 0.434C_c \quad (3.10.8)$$

公式(3.10.3-7)中的  $M$  使用公式(3.8.3)计算，内摩擦角  $\phi'$ 、不可逆比率(irreversibility ratio)、初始孔隙率(initial void ratio)使用下面公式计算。

$$\sin\phi' = 0.81 - 0.233\log I_p \quad (3.10.9)$$

$$\Lambda = M / 1.75 \quad (3.10.10)$$



$$e_0 = 3.78\lambda + 0.156 \quad (3.10.11)$$

$$\alpha_e = 0.05 / \lambda \quad (3.10.12)$$

$$\log c_v = -0.025I_p - 0.25 \pm 1 (\text{cm}^2 / \text{min}) \quad (3.10.13)$$

$$T_v(90\%) = 0.848 \quad (3.10.14)$$

### 经验公式

经验公式需要输入下列材料参数。

表3.10.4 经验公式需要输入的材料参数

材料参数	说明	使用模型
塑性指数( $I_p$ )	塑性指数	弹塑性、弹粘塑性
压缩指数( $C_c$ )	压缩指数	弹塑性、弹粘塑性
膨胀指数( $C_r$ )	膨胀指数(可不输入)	弹塑性、弹粘塑性
超固结率(OCR)	超固结率	弹塑性、弹粘塑性
排水距离( $H$ )	排水距离	弹粘塑性

使用上面参数的其他参数如下。

$$\lambda = 0.434C_c \quad (3.10.15)$$

$$\kappa = \lambda / 10 \quad (3.10.16)$$

$K_{oc}$  : 参见公式(3.10.4)

$D$  : 参见公式(3.10.5)

$\alpha$  : 参见公式(3.10.6)

$\dot{\nu}_0$  : 参见公式(3.10.7)

当用户直接输入膨胀指数  $C_r$  时, 上面公式(3.10.16)将修改为下列形式。

$$\kappa = 0.434C_r \quad (3.10.17)$$

**注意:** 使用自动计算功能时, 内摩擦角  $\phi'$  值将使用自动计算的值。

### 3.10.3 屈服函数

#### 3.10.3.1 弹塑性屈服函数

关口-太田模型的弹塑性屈服函数如下。

$$f(\boldsymbol{\sigma}', \varepsilon_v^p) = MD \ln \frac{p'}{p'_0} + D\eta^* - \varepsilon_v^p = 0 \quad (3.10.18)$$

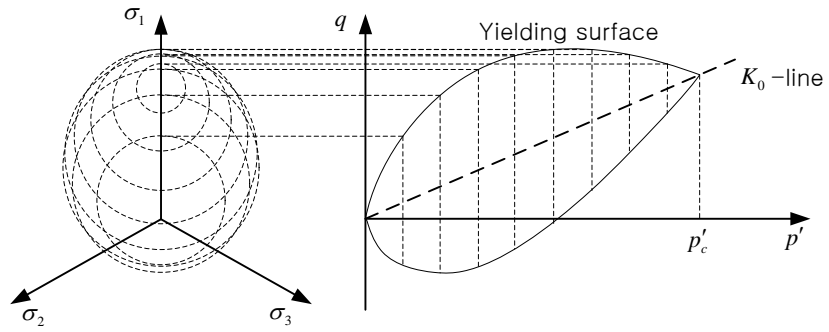
其中， $\varepsilon_v^p$  为塑性体积应变， $\eta^*$  为广义应力比。

$$\eta^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\mathbf{s}}{p'} - \frac{\mathbf{s}_0}{p'_0} \right\| \quad (3.10.19)$$

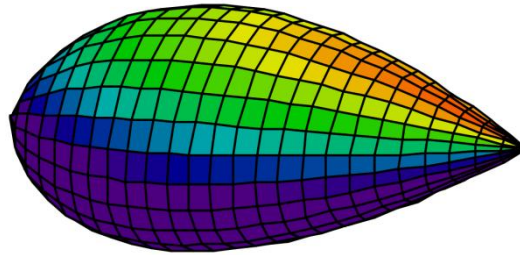
其中，

- $p'$  : 平均有效应力
- $\mathbf{s}$  : 应力偏量向量
- $\mathbf{s}_0$  : 先期固结应力的应力偏量向量
- $p'_0$  : 先期固结应力的平均有效应力

图10.3为主应力空间上的关口-太田模型屈服形状。



(a) 偏差平面和子午面上的屈服面形状



(b) 主应力空间上的屈服面三维视图

图 10.3 关口-太田模型的屈服面形状

### 3.10.3.2 弹粘塑性屈服函数

关口-太田模型的弹粘塑性屈服函数如下。

$$f(\boldsymbol{\sigma}', \varepsilon_v^p) = \alpha \ln \left\{ 1 + \frac{\dot{\varepsilon}_0 t}{\alpha} \exp \left( \frac{\bar{f}(\boldsymbol{\sigma}')}{\alpha} \right) \right\} - \varepsilon_v^p = 0 \quad (3.10.20)$$

其中,

- $\alpha$  : 次固结系数
- $\dot{\varepsilon}_0$  : 初始体积应变率
- $t$  : 固结持续时间
- $\varepsilon_v^p$  : 粘塑性体积应变

$\bar{f}(\boldsymbol{\sigma}')$  使用下面公式计算。

$$\bar{f}(\boldsymbol{\sigma}') = MD \ln \frac{p'}{p_0} + D\eta^* \quad (3.10.21)$$

### 3.10.4 初始条件

剑桥-粘土等粘土模型一般将先期固结状态作为初始状态，而初始状态对这些模型的分析是非常重要的考虑事项。关口-太田模型的岩土系数可分别考虑线性固结状态和初始状态，而且屈服函数中包含了表示初始状态的参数  $p'_0$  和  $\mathbf{s}_0$ ，所以可以相对准确的模拟粘土的特性。

初始状态的有效应力可以表示如下。

$$\boldsymbol{\sigma}'_i = \begin{Bmatrix} \sigma'_{iXX} \\ \sigma'_{iYY} \\ \sigma'_{iZZ} \\ \tau_{iXZ} \end{Bmatrix} \quad (3.10.22)$$

假设重力方向为-Z(Z轴负方向)，先期固结的竖向应力  $\sigma'_{0ZZ}$  可按下面公式计算。

$$\sigma'_{0ZZ} = \sigma'_{ZZ} \times OCR \quad (3.10.23)$$

先期固结的有效应力  $\sigma'_o$  的构成可表示如下。

$$\sigma'_o = \begin{Bmatrix} \sigma'_{0XX} \\ \sigma'_{0YY} \\ \sigma'_{0ZZ} \\ \sigma'_{0XZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma'_{Z0} \times K_{0C} \\ \sigma'_{Z0} \times K_{0C} \\ \sigma'_{Z0} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.10.24)$$

使用上面数值可按下面公式计算  $p'_o$  和  $\mathbf{s}_o$ 。

$$p'_o = \frac{\sigma'_{0XX} + \sigma'_{0YY} + \sigma'_{0ZZ}}{3} \quad (3.10.25)$$

$$\mathbf{s}_o = \sigma'_o - p'_o \mathbf{1}$$

其中,  $\mathbf{1} = \{1, 1, 1, 0\}^T$



# 渗流材料模型

## 4.1 渗流系数函数

液态状态的水在土中可以视为沿着一定的路径流动，当含水率降低时表示流动路径的大小和数量减小，因此当含水率降低时在水中流动的水量也将减少。极端的说在干燥土中没有沿着路径流动的水，而在饱和土中所有流动路径都有效，渗流性也达到最大值。

水在土中的流量可使用达西法则(Darcy)利用渗流系数计算。对于非饱和岩土渗流系数受含水率影响，随着含水率的降低渗流会急剧减小，渗流系数在饱和时达到最高值。含水率又是孔隙水压的函数，因此渗流系数与孔隙水压相关，图4.1.1为渗流系数与孔隙水压的相关曲线。

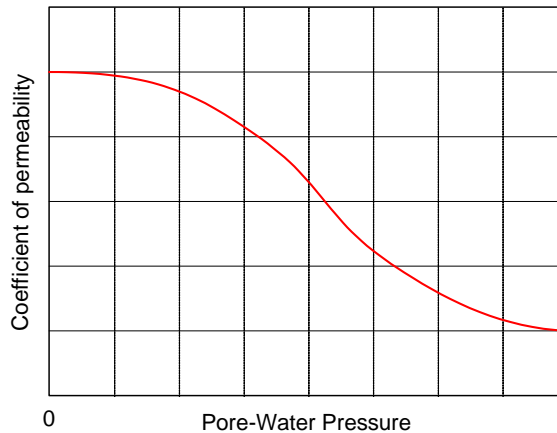


图 4.1.1 渗流系数函数

## 4.2 体积含水率函数

水在土中流动时，受土的毛细吸水力和岩土结构的影响，土中将保存一定的含水量。在渗流分析中该含水量一般使用体积含水量表示，公式如下。

$$\Theta = V_w / V \quad (4.2.1)$$

其中，

- $\Theta$  : 体积含水率
- $V_w$  : 水的体积,
- $V$  : 全部体积

如图4.2.1所示的体积含水率与孔隙水压的关系曲线被称为含水特征曲线，随孔隙水压水头变化的含水特征曲线的斜率  $m_w$  表示的是土中含水量的变化率。

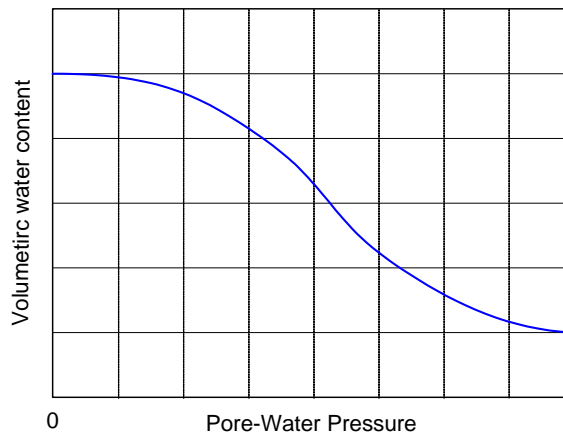


图 4.2.1 含水特征曲线

$$\Theta_w = \Theta_r + \frac{(\Theta_s - \Theta_r)}{[1 + (\alpha h)^n]^m} \quad (4.2.2)$$

其中,

$\Theta_w$  : 非饱和状态的体积含水率(unsaturated volumetric water content)

$\Theta_s$  : 饱和体积含水率(saturated volumetric water content)

$\Theta_r$  : 最小残留体积含水率(residual volumetric water content)

$\alpha$ 、 $n$ 、 $m$ : 曲线形状函数( $\alpha=1/\text{单位长度}$ 、 $m=1-1/n$ )

$h$  : 负的孔隙水压水头

饱和度为100%时的体积含水率与土的孔隙率相同, 可用相对于所有体积的孔隙体积比表示。

对于孔隙水压水头接近零且在一定外部荷载作用下的完全饱和土, 当孔隙水压水头增加变为正数时有效应力将减小而土将膨胀, 土的含水量将增加; 当孔隙水压水头减少变为负数时土中的水将排出, 土的含水量将减少。但是当水完全排出后即使孔隙水压水头再减少含水量也不会发生变化。



### 4.3 关联函数

前面章节介绍的渗流系数和体积含水率均仅为压力水头的函数，但是实际上渗流系数、体积含水率、压力水头三者之间是相关联的。在SoilWorks中提供这种关联函数，使用压力水头计算含水率，然后通过含水率再计算渗流系数。同样，使用含水率与饱和度的关系，提供压力水头、饱和度、渗流系数比的关联函数。

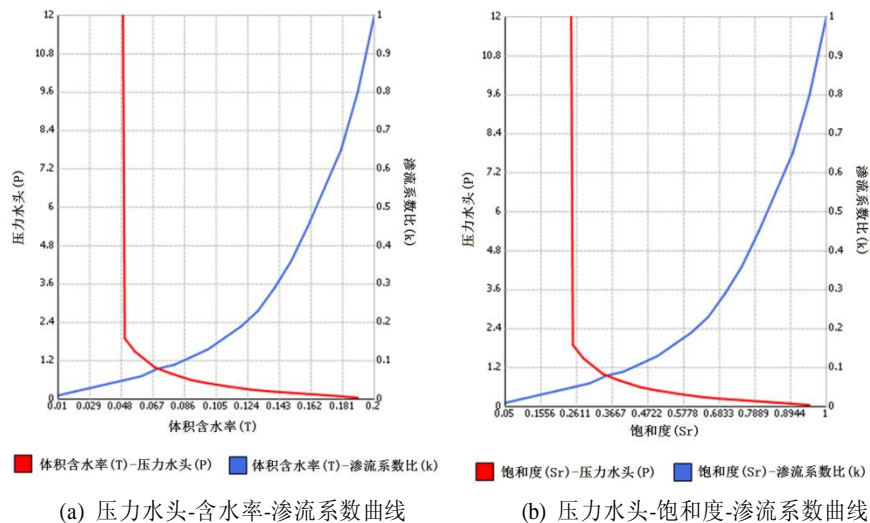


图 4.3.1 关联函数

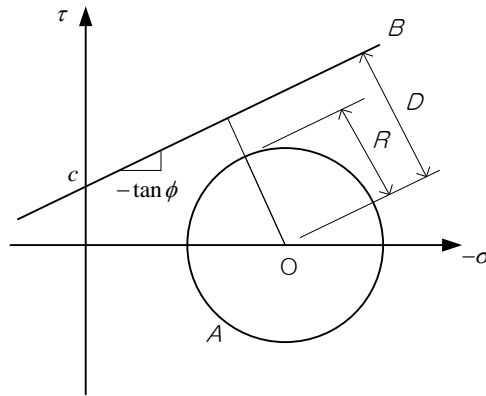


# 附录

## A. 输出安全系数功能

在SoilWorks中可通过查看安全系数来确定分析结果的安全度，该功能适用于所有材料中。

安全系数为当前应力状态与破坏应力的比值，破坏应力的标准使用了莫尔-库伦破坏标准。如下图A.1所示，某点的莫尔圆与库伦摩擦准则计算的直线相切时即发生破坏。



图A.1 莫尔-库伦破坏标准

根据莫尔-库伦破坏标准计算的安全系数如下：

$$f = \frac{D}{R} \tag{A.1}$$

其中，

$R$  : 莫尔圆的半径

$D$  : 由莫尔圆的中心到直线B的距离

假设应力状态为  $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xz}\}^T$ ，模型在X-Z平面，重力方向为-Z时，如果  $\sigma_{zz} > \sigma_{xx}$ ，则莫尔圆如下。

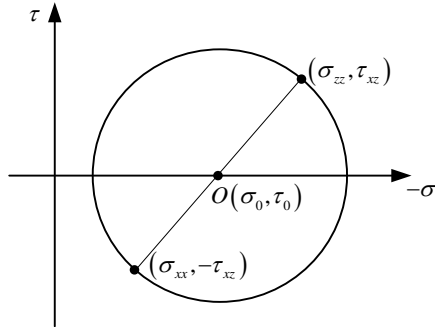


图 A.2 任意点应力的莫尔圆

由图A.1、图A.2可推导莫尔圆的半径  $R$  和由莫尔圆中心到直线B的距离  $D$ 。

$$\sigma_0 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \quad (\text{A.2})$$

$$R = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + \tau^2} \quad (\text{A.3})$$

3)

$$D = \frac{|\tau_0 - c + \sigma_0 \tan \phi|}{\sqrt{c^2 + (\tan \phi)^2}} \quad (\text{A.4})$$

其中，

$\sigma_0$  : 莫尔圆的中心应力

$\sigma_1$  : 最大主应力

$\sigma_2$  : 最小主应力

$c$  : 粘聚力



$\phi$  : 内摩擦角

当最大/最小主应力在等压轴上时莫尔圆为一个点，无法计算安全系数，此时安全系数输出-1；  
当莫尔圆的中心超出受拉限值时安全系数输出-2。

## B. 输出塑性状态功能

该功能可以方便地确认进入塑性的区域。因为不同材料模型的破坏标准不同，因此程序按照下面标记各材料模型的弹性和塑性状态。另外，因为荷载的加载、卸载时应力的状态不同，所以标记也区分了加载、卸载、受拉状态的破坏标记。

### ➤ 邓肯-张本构模型

状态	状态参数	后处理标记
弹性	11	
弹性	12	
卸载或重新加载	13	
受拉	14	

### ➤ D-min本构模型

状态	状态参数	后处理标记
弹性	21	
弹性	22	
受拉	23	

➤ 莫尔-库伦本构模型

状态	状态参数	后处理标记
弹性	31	
塑性	32	○
卸载或重新加载	33	⊖
受拉弹性	34	⊕

➤ 德鲁克-普拉格本构模型

状态	状态参数	后处理标记
弹性	41	
塑性	42	□
卸载或重新加载	43	▢
受拉弹性	44	⊞


➤ 修正剑桥-粘土本构模型

状态	状态参数	后处理标记
弹性	61	
塑性	62	◐
卸载或重新加载	63	◑



➤ 霍克-布朗本构模型

状态	状态参数	后处理标记
弹性	71	
塑性	72	▽
卸载或重新加载	73	▽

➤ 范梅塞斯本构模型

状态	状态参数	后处理标记
弹性	81	
塑性	82	
卸载或重新加载	83	

➤ 特雷斯卡本构模型

状态	状态参数	后处理标记
弹性	91	
塑性	92	
卸载或重新加载	93	

➤ 关口-太田本构模型

状态	状态参数	后处理标记
弹性	101	
塑性	102	
卸载或重新加载	103	
受拉弹性	104	

## 第2部分

---

# 隧道分析

### 非线性有限元分析

- |     |           |
|-----|-----------|
| 第1章 | 静力分析      |
| 第2章 | 施工阶段分析    |
| 第3章 | 应力-渗流耦合分析 |
| 第4章 | 有限元       |





# 隧道

## ○ 非线性有限元分析 / 001

### ○ 第1章 静力分析 / 002

- 1.1 概要 / 002
- 1.2 线性静力分析 / 003
- 1.3 非线性分析 / 013
  - 1.3.1 概要 / 013
  - 1.3.2 非线性弹性分析 / 013
  - 1.3.3 弹塑性分析 / 014

### ○ 第2章 施工阶段分析 / 023

- 2.1 概要 / 023
- 2.2 单元的激活和钝化 / 025
- 2.3 荷载的激活和钝化 / 027
- 2.4 边界条件的激活和钝化 / 029
- 2.5 荷载释放系数 / 029
- 2.6 位移初始化 / 030
- 2.7 材料特性的变化 / 030
- 2.8 原场地应力 / 030
  - 2.8.1  $K_0$  法 / 30
  - 2.8.2 自重分析方法 / 31
- 2.9 不排水分析 / 031

### ○ 第3章 应力渗流耦合分析 / 032

- 3.1 概要 / 032
- 3.2 有效应力 / 033
- 3.3 基本方程 / 034

### ○ 第4章 有限元 / 035

- 4.1 平面应变单元 / 036
  - 4.1.1 概要 / 036
  - 4.1.2 单元形状、节点号、单元自由度 / 037
  - 4.1.3 单元特性 / 038
  - 4.1.4 有限元公式 / 039
  - 4.1.5 单元结果 / 041
- 4.2 桁架单元 / 044
  - 4.2.1 概要 / 044
  - 4.2.2 单元形状、单元坐标系、节点号、单元自由度 / 044
  - 4.2.3 单元特性 / 045
  - 4.2.4 有限元公式 / 046
  - 4.2.5 单元结果 / 047
- 4.3 植入式桁架单元 / 048
  - 4.3.1 概要 / 048
  - 4.3.2 有限元公式 / 048
  - 4.3.3 单元结果 / 050
- 4.4 梁单元 / 051
  - 4.4.1 概要 / 051
  - 4.4.2 单元形状、单元坐标系、单元自由度 / 051
  - 4.4.3 单元特性 / 052

- 4.4.4 有限元公式 / 053
- 4.4.5 单元结果 / 057
- 4.5 界面单元 / 060
  - 4.5.1 概要 / 060
  - 4.5.2 单元坐标系、单元形状、单元自由度 / 061
  - 4.5.3 单元特性 / 061
  - 4.5.4 有限元公式 / 062
  - 4.5.5 单元结果 / 064
- 4.6 桩、锚、土钉、锚杆单元 / 065
  - 4.6.1 概要 / 065
  - 4.6.2 单元形状、单元坐标系、单元自由度 / 066
  - 4.6.3 单元特性 / 066
  - 4.6.4 有限元公式 / 067
  - 4.6.5 单元结果 / 070
- 4.7 桩端支承单元 / 071
  - 4.7.1 概要 / 071
  - 4.7.2 单元形状、单元坐标系、单元自由度 / 072
  - 4.7.3 单元特性 / 073
  - 4.7.4 有限元公式 / 073
  - 4.7.5 单元结果 / 075
- 4.8 土工格栅单元 / 076
- 4.9 弹性连接单元 / 077
- 4.10 刚性连接 / 078
- 4.11 节点弹簧、节点阻尼 / 079





# 非线性有限元分析

岩土分析与常规的结构分析的主要区别在于结构分析重视荷载的不确定性而岩土分析重视材料特性的不确定性。因此结构分析的目的是通过加载各种荷载且通过各种可能的荷载组合寻找最不利的设计内力；而岩土分析需要考虑岩土材料的非线性特性、岩土的形成过程、结构的施工过程来确定材料的当前状态，通过位移和应力验算结构的安全和岩土的稳定。

SoilWorks提供了静力分析、渗流分析、应力-渗流耦合分析、固结分析、施工阶段分析、动力分析等岩土分析所需的各种分析功能。



# 静力分析

## 1.1 概要

静力分析是指结构没有振动时的分析，在实际工程中当外部荷载的频率不大于结构基本固有周期的 $1/3$ 时，可近似看做处于静态。静力分析又可以区分为线性静力分析和非线性静力分析，而线性静力分析又可以视为非线性静力分析的特殊情况。结构的非线性特性是由下列因素引起的。

- ✓ 材料的非线性特性
- ✓ 结构应变的几何非线性特性
- ✓ 边界的滑动、分离引起的边界非线性特性

岩土分析中的材料非线性一般指岩土材料的非线性，有时也会考虑结构材料的非线性。材料的本构模型一般可分类如下。

- ✓ 线弹性模型
- ✓ 非线性弹性模型
- ✓ 弹塑性模型
- ✓ 粘弹性模型
- ✓ 粘弹塑性模型

在SoilWorks的隧道模块中提供了线弹性模型、非线性弹性模型、弹塑性模型，详细内容请参考材料手册。

岩土分析中因为外部荷载引起的结构的变形相对很小，因此大部分的岩土分析一般可不考虑几何非线性。

岩土分析中的边界非线性一般是由于在不同岩层、不同材料的接触面上发生了剪切滑动、裂缝张开、接触等相对位移引起的。为了描述接触面的状态，一般使用下列单元模拟。

- ✓ 边界单元：滑动、开裂或张开、接触、粘结

- ✓ 弹性连接单元：只受拉、只受压、钩、间隙
- ✓ 弹簧单元<sup>1</sup>：只受拉、只受压、钩、间隙

SoilWorks中静力分析分为线性静力分析和非线性静力分析。线性静力分析中只能使用线性弹性材料模型，但是可以使用只受压、只受拉、钩、间隙类型的弹性连接单元和桁架单元。因此线性静力分析可以用于分析岩土的大致的变形、施工阶段的初始条件分析、隧道的衬砌分析。当定义了岩土和结构的非线性材料特性，但分析选择了线性静力分析时，程序内部将自动将非线性材料模型转换为线性弹性模型进行分析。

## 1.2 线性静力分析

线性静力分析是将岩土和结构的材料视为线性弹性材料、外部荷载视为静力荷载进行的分析。一般来说材料的线性弹性只发生在荷载加载初期发生的应变很小时，基本方程遵循虎克法则。

从二十世纪九十年代初，随着计算机硬件技术的发展以及非线性分析计算内核的进步，岩土分析中开始大量使用有限单元法进行非线性弹性分析和弹塑性分析。但是由于线弹性分析的计算效率较高、查看分析结果也比较方便，因此在确认岩土的应力分布状况和应力集中发生位置等岩土分析的初期阶段，仍然在大量使用线弹性静力分析。

岩土材料的应力-应变关系相当复杂，不仅受材料本身特性的影响，而且受孔隙比、应力历程、荷载加载方式的影响，岩土分析理论中的各种材料本构模型也只能是适合于某种状态下的岩土，不存在适合于所有岩土材料的本构模型。在满足一定精度的情况下，尽量使用较少的参数对岩土的特性进行理想化，这样有助于提高计算效率，因此如何对岩土的特性进行理想化变得尤为重要了。

材料特性中的主要参数为弹性模量，各种弹性模量中使用较多的是切线模量和割线模量，完全线弹性模型的切线模量和割线模量相同，非线性模型中二者数值不同，一般将割线模量作为变形模量(deformation modulus)使用。

---

1 SoilWorks的当前版本中弹簧单元不支持非线性本构模型。

SoilWorks的线弹性分析的平衡方程如下。

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{p} \quad (1.2.1)$$

其中，  
 $\mathbf{K}$  : 岩土和结构的整体刚度矩阵，  
 $\mathbf{u}$  : 各自由度的位移向量  
 $\mathbf{p}$  : 荷载向量或不平衡力向量

通过上面公式计算获得位移向量，然后使用协调方程(compatibility equation)获得应变，最后通过本构方程(constitutive equation)获得应力。

发生变形时，任意点的坐标(x, y, z)将变成新的坐标(x+u, y+v, z+w)，单元不是刚体时其位移向量(u, v, w)在单元内部的变化是连续的，且可用坐标(x, y, z)的函数来表示。各方向的应变的变形协调公式如下。

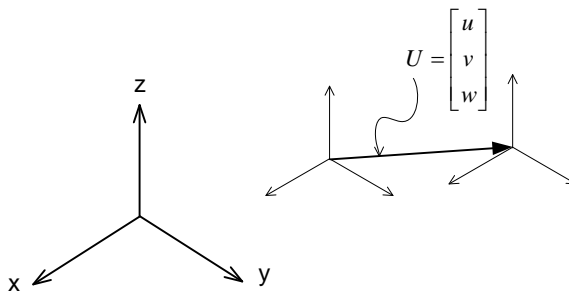


图 1.2.1 位移(u, v, w)的定义



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

如下式所示，弹性材料在某一方向有应力作用时，受泊松比效应的影响在另一个方向也会产生应变。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} \\
 \varepsilon_x = \varepsilon_y &= -\nu \varepsilon_z
 \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

其中， $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  : x、y、z轴向上的应变  
 $E$  : 弹性模量  
 $\nu$  : 泊松比

剪切应力  $\tau_{zx}$  对应的剪切应变如下。

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \tag{1.2.4}$$

其中  $G$  为剪切模量。

剪切模量与弹性模量的关系如下。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.2.5}$$

岩土材料的体积应变可按下面公式计算。

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}(1 - 2\nu) \quad (1.2.6)$$

其中, (1.2.7)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

因此体积弹性模量K(bulk modulus)可用下式表示。

$$K = \frac{[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3]}{\Delta V/V} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (1.2.8)$$

下图表示的是体积弹性模量和剪切模量的物理意义。

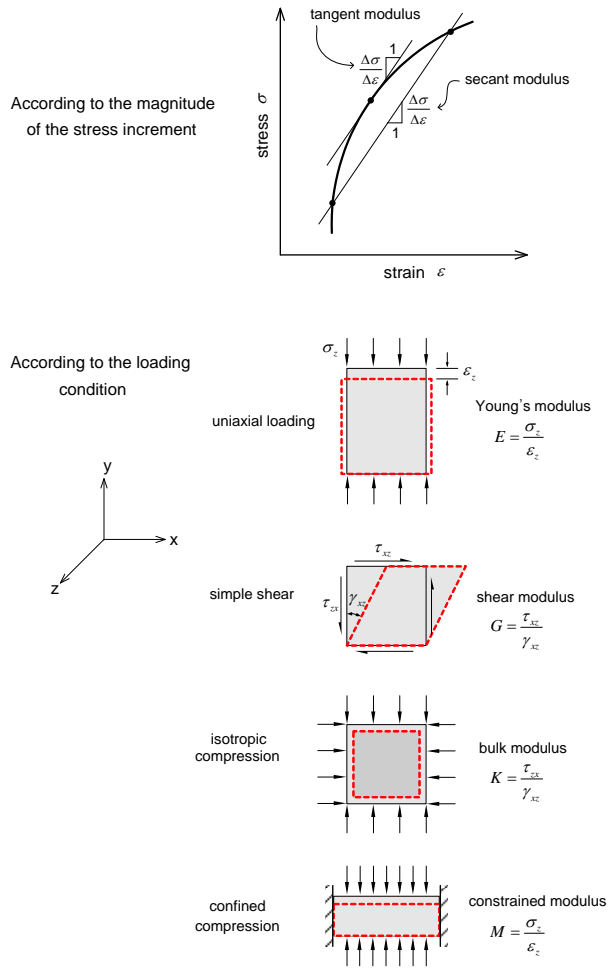


图1.2.2 各种模量的示意图

左右边界在受约束状态下发生单轴方向变形时，约束弹性模量  $M$  (constrained modulus)可按下列式计算。特别是当  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$  时，水平方向应力和约束弹性模量的计算公式如下。

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \quad (1.2.9)$$

$$M = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \quad (1.2.10)$$

下表为约束弹性模量与各种单轴固结特性的关系公式。

表1.2.1 固结特性参数和约束弹性模量的关系

固结参数	与约束弹性模量 $M$ 的关系
体积变化系数(coefficient of volume change, $m_v$ )	$m_v = \frac{1}{M}$
抗压系数(coefficient of compressibility, $a_v$ )	$a_v = \frac{1+e_0}{M}$
压缩指数(compression index, $c_c$ )	$c_c = \frac{(1+e_0)\sigma_{va}}{0.435M}$

表1.2.2 岩石及其他材料的弹性模量和泊松比

岩土材料	弹性模量 (tonf/m <sup>2</sup> )	泊松比
闪岩(Amphibolite)	9.4~12.1 ×10 <sup>6</sup>	0.28~0.30
硬石膏(Anhydrite)	6.8 ×10 <sup>6</sup>	0.30
辉绿岩(Diabase)	8.7~11.7 ×10 <sup>6</sup>	0.27~0.30
闪长岩(Diorite)	7.5~10.8 ×10 <sup>6</sup>	0.26~0.29
白云石(Dolomite)	11.0~12.1 ×10 <sup>6</sup>	0.30
纯橄榄岩(Dunite)	14.9~18.3 ×10 <sup>6</sup>	0.26~0.28
含长石的片麻岩(Feldspathic gneiss)	8.3~11.9 ×10 <sup>6</sup>	0.15~0.20
辉长岩(gabbro)	8.9~11.7 ×10 <sup>6</sup>	0.27~0.31
花岗岩(granite)	7.3~8.6 ×10 <sup>6</sup>	0.23~0.27
冰(ice)	7.1 ×10 <sup>6</sup>	0.36
石灰石(limestone)	8.7~10.8 ×10 <sup>6</sup>	0.27~0.30
大理石(marble)	8.7~10.8 ×10 <sup>6</sup>	0.27~0.30
云母片岩(mica Schist)	7.9~10.1 ×10 <sup>6</sup>	0.15~0.20
黑曜石(obsidian)	6.5~8.0 ×10 <sup>6</sup>	0.12~0.18
奥长岩(oligoclasite)	8.0~8.5 ×10 <sup>6</sup>	0.29
石英岩(quartzite)	8.2~9.7 ×10 <sup>6</sup>	0.12~0.15
岩盐(rock salt)	3.5 ×10 <sup>6</sup>	0.25
板岩(slate)	7.9~11.2 ×10 <sup>6</sup>	0.15~0.20
铝(aluminum)	5.5~7.6 ×10 <sup>6</sup>	0.34~0.36
钢(steel)	20.0 ×10 <sup>6</sup>	0.28~0.29

表1.2.2中的弹性模量是采用无裂纹的小试验体在实验室通过实验获得的完整岩(intact rock)的弹性模量。具体设计中使用的弹性模量应考虑尺寸效应、岩体内的不连续性等因素采用折减后的弹性模量。图1.2.3是各种岩石质量指标RQD(Rock Quality Designation)对应的弹性模量实测值。RQD是指在包含裂纹的100cm的钻孔长度内超过10cm长度的岩心的累计长度占总长度比例。即使RQD为100%也不能视为完整岩，但是RQD值越高，可以认为岩石品质越好。风化越严重，岩石的RQD值越低。

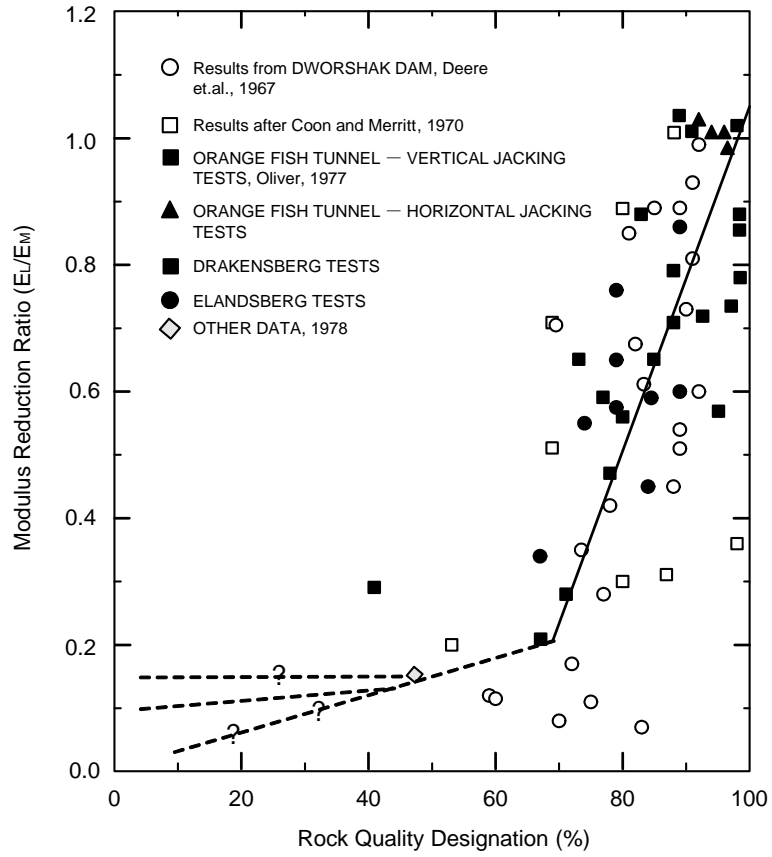


图1.2.3 RQD与弹性模量折减率(EL/EM)的关系

由图1.2.3可知RQD为70%时，实验室得到的弹性模量需要折减20%。

三维条件下的材料的应力-应变关系如下。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2.11)$$

也可以用下式表示。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2.12)$$

$$\text{其中, } A = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

即,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.2.13)$$

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = K(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (1.2.14)$$

$$\text{其中, } K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

协调矩阵  $\mathbf{D}$  可表示如下。

$$\begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \quad (1.2.15)$$

其中,  $D_1 = K + (4/3)G$

$D_2 = K - (2/3)G$

$D_3 = G$



## 1.3 非线性分析

### 1.3.1 概要

岩土的非线性特性是通过岩土的材料本构关系来模拟的，岩土的非线性本构关系有非线性弹性、弹塑性、粘弹塑性，当岩土发生的应变较小时可使用非线性弹性模型模拟，当应变较大且应变与荷载和变形的速度相关时可使用粘弹塑性模型模拟，其余大部分情况可使用弹塑性模型模拟。在SoilWorks的隧道模块中仅支持非线性弹性分析和弹塑性分析。

### 1.3.2 非线性弹性分析

最具代表性的非线性弹性材料模型为邓肯-张模型(Duncan-Chang model)，该模型的应力-应变关系为双曲线，岩土基床系数为岩土的约束应力和剪切应力的函数。该模型的优点是其参数可由三轴压缩试验或其他文献中获得，缺点是不能模拟损伤后的强度降低。

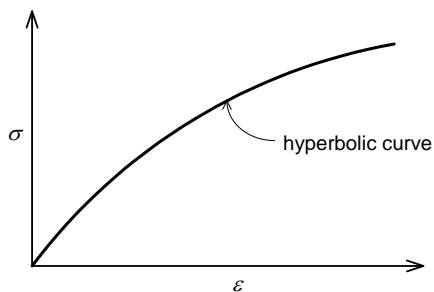


图 1.3.1 邓肯-张模型的应力-应变关系曲线

### 1.3.3 弹塑性分析

#### 1.3.3.1 概要

材料的塑性特性表现在卸载后会残留一些永久的变形。如下公式所示弹塑性模型的应变由弹性成分和塑性成分组成。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (1.3.1)$$

其中,

$\boldsymbol{\varepsilon}$	:	总应变
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	:	弹性应变
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	:	塑性应变

在弹性范围内应力和应变的关系遵循虎克法则(Hook's law), 因此有下面公式。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (1.3.2)$$

其中,

$\boldsymbol{\sigma}$	:	应力向量
$\mathbf{D}$	:	材料刚度矩阵

当某点的应力状态超过屈服标准时, 表示该点发生了屈服, 材料的屈服标准可通过材料试验获得, 引起塑性流动(plastic flow)的应力值可用函数形式表示如下。

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (1.3.3)$$

其中,

$f$	:	屈服函数(yield function)
$\kappa$	:	硬化参数(hardening parameter)

当屈服函数  $f$  小于零时不发生塑性流动,  $f$  大于零时发生塑性流动。

## 1.3.3.2 塑性流动法则

塑性流动一般用增量形式表示，计算塑性流动时可使用增量应力方向和塑性应变方向，其中增量应力方向如下。

$$\mathbf{n}_i = \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.3.4)$$

其中  $\mathbf{n}$  为与屈服面垂直的增量应力方向向量， $i$  为具有多个屈服面时的屈服函数数量。

根据科伊特法则(Koiter's law)，塑性应变增量可用增量的大小和方向两个成分表示如下。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \sum_{i=1}^n \dot{\lambda}_i \frac{\partial g_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i=1}^n \dot{\lambda}_i \mathbf{m}_i \quad (1.3.5)$$

其中， $g_i$  为塑性势能函数(plastic potential function)，是硬化参数  $\kappa$  的函数，可通过材料试验获得。 $\dot{\lambda}_i$  为塑性乘数(plastic multiplier)，需要满足下列的库恩-塔克条件(Kuhn-Tucker condition)。

$$f \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda}_i \geq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda}_i f = 0 \quad (1.3.6)$$

由上述条件，当屈服函数  $f$  小于零时  $\dot{\lambda}_i$  为零，表示不会发生塑性流动。

公式(1.3.5)中的  $\mathbf{m}$  为塑性应变增量的方向向量。不使用塑性势能函数  $g$ ，而是使用屈服函数  $f$  的  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  定义塑性应变增量方向的方法为相关塑性流动法则(associated flow rule)，使用塑性势能函数的  $\partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}$  定义塑性应变增量方向的方法为非相关塑性流动法则(non-associated flow rule)。

一般来说象范梅塞斯或特雷斯卡模型那样在应力空间上沿着等压轴(hydrostatic axis)具有相同偏差应力(deviatoric stress)分布的材料本构模型使用的是相关塑性流动法则。但是象莫尔-库伦和德鲁克-普拉格模型那样偏差应力沿着等压轴发生变化的材料模型使用的是非相关塑性流动法则。当沿着等压轴的偏差应力发生变化使用非相关塑性流动法则时，对应力方向和应变方

向不一致引起的过度的体积膨胀现象有抑制和改善作用，但是由于刚度矩阵为非对称，因此需要使用可以求解非对称矩阵的求解器，一般收敛速度较慢。

### 1.3.3.3 线性化的协调条件(Linearized consistency condition)

弹塑性材料的状态一般采用增量形式的本构关系表示。非相关塑性流动中对微小变形状态的本构关系公式如下。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\mathbf{m}) \quad (1.3.7)$$

应力在屈服面上时，线性化的协调条件(linearized consistency condition)可通过将屈服函数按台劳级数(Taylor series)的一次展开式定义。

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = \mathbf{n}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h \dot{\lambda} = 0 \quad (1.3.8)$$

其中， $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ， $h$  为硬化模量(hardening modulus)，且有  $h = -\frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda}$ 。

此时， $\partial f / \partial \kappa$  可由试验得到的  $f - \kappa$  关系曲线中获得。不同的材料模型的  $\partial \kappa / \partial \lambda$  不同，在1.2节中介绍了各材料本构模型使用  $\kappa - \lambda$  关系计算的方法。

将公式(1.3.7)代入公式(1.3.8)，可得塑性乘数  $\dot{\lambda}$  如下。

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n}^T \mathbf{D}}{h + \mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{m}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.3.9)$$

将公式(1.3.7)代入(1.3.9)可得增量形式的应力和应变的关系公式如下。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left( \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{m} \mathbf{n}^T \mathbf{D}}{h + \mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{m}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.3.10)$$

其中  $\mathbf{D}^{ep}$  为切线刚度矩阵，对于非相关塑性流动法则有  $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$ ，因此  $\mathbf{D}^{ep}$  为非对称矩阵。

#### 1.3.3.4 增量方程的积分(Integration of rate form)

增量方程的积分方法有显式向前欧拉方法(explicit forward Euler algorithm with sub-increment)和隐式向后欧拉方法(implicit backward Euler algorithm)。

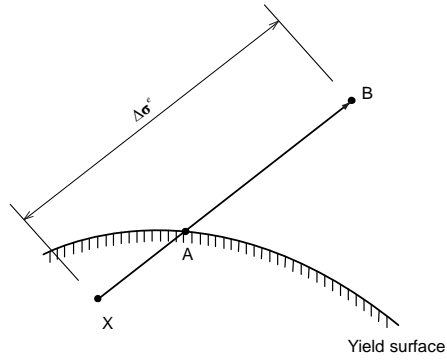
显式向前欧拉方法的塑性流动方向的计算位置为增量应力与屈服面的相交点(图1.3.2和图1.3.3中的A点)，而隐式向后欧拉方法的塑性流动方向的计算位置为最终应力点(图1.3.4中的B点)。

显式向前欧拉方法相对隐式向后欧拉方法比较简单且不需要在积分点进行反复计算，但也有下面的缺点。

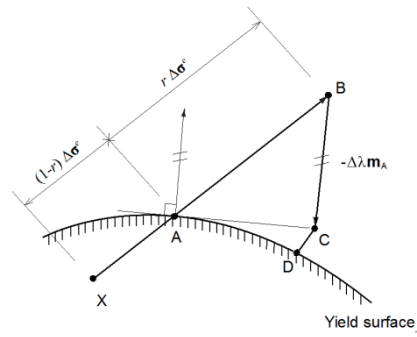
- ✓ 在一定条件下才稳定
- ✓ 为了满足某个准确度需要进行子增量(sub-increment)分析(参见图1.3.3).
- ✓ 为了回归屈服面需要进行修正(参见图1.3.2).

另外，显式向前欧拉方法不能构成协调刚度矩阵(consistent tangent stiffness matrix)。

隐式向后欧拉方法不需要进行子增量分析或人为的回归修正也能获得较为正确的解，且可以构成协调刚度矩阵，因此计算效率要比显式向前欧拉方法高，但是需要在积分点进行反复计算。



(a) 交叉点 A 的位置



(b) 由 A 点沿切线方向移动到 C 点后回归到 D 位置

图 1.3.2 显式向前欧拉方法

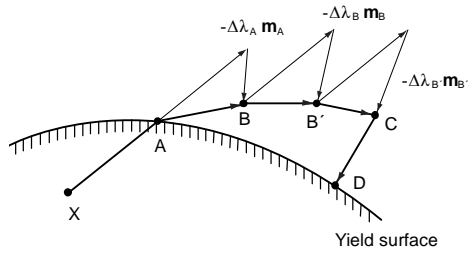


图 1.3.3 显式向前欧拉方法的子增量

## 1.3.3.5 显式向前欧拉方法(Explicit forward Euler method)

显式向前欧拉方法中首先假设弹性应力增量(图1.3.2(a)中的B点)。

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^e &= \mathbf{D}\Delta\varepsilon \\ \sigma_B &= \sigma_X + \Delta\sigma^e\end{aligned}\tag{1.3.11}$$

下面计算弹性极限所需的增量应力。初始弹性增量应力可分为弹性范围内的容许增量应力  $(1-r)\Delta\sigma^e$  和不可能发生发生的超过屈服面以外的增量应力  $r\Delta\sigma^e$ 。定义弹性极限的增量应力可使用下面公式计算(图1.3.2(a)的A点)。

$$\begin{aligned}f(\sigma_X + (1-r)\Delta\sigma^e, \kappa) &= 0 \\ r &= \frac{f_B}{f_B - f_X}\end{aligned}\tag{1.3.12}$$

公式(1.3.10)、(1.3.11)的下标代表的意义可参照图1.3.2。

使用子增量的方法就是将脱离屈服面的增量应力  $r\Delta\sigma^e$  分为  $k$  个小的子增量应力(参照图1.3.3)，子增量数量与误差的大小相关，可使用下面公式计算。

$$k = \text{INT}[\delta(\sigma_{\text{effB}} - \sigma_{\text{effA}})/\sigma_{\text{effA}}] + 1\tag{1.3.13}$$

其中， $\sigma_{\text{effA}}$  和  $\sigma_{\text{effB}}$  为图1.3.2(a)中的A点和B点的有效应力。

最终应力不在屈服面上时，将使用下面回归公式人为的将应力回归到屈服面上(图1.3.3的D点)。

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_C &= \frac{f_C}{h + \mathbf{n}_C^T \mathbf{Dm}_C} \\ \sigma_D &= \sigma_C - \Delta\lambda_C \mathbf{Dm}_C\end{aligned}\tag{1.3.14}$$

### 1.3.3.6 隐式向后欧拉方法(Implicit backward Euler method)

显式向前欧拉方法是利用与屈服面的交点A上的垂直于屈服面的竖向应力成分计算下一阶段的应力，因此必须计算交叉点的应力，但是隐式向后欧拉法计算的是如图1.3.4所示的B点的应力。

$$\sigma_C = \sigma_B - \Delta\lambda \mathbf{D} \mathbf{m}_C \quad (1.3.15)$$

公式(1.3.15)的左右两侧都有未知的C点的值，因此需要通过反复计算求解。假设当前应力与向后欧拉应力的差，即残余应力向量为  $\mathbf{r}$ ，则有如下定义。

$$\mathbf{r} = \sigma_C - (\sigma_B - \Delta\lambda \mathbf{D} \mathbf{m}_C) \quad (1.3.16)$$

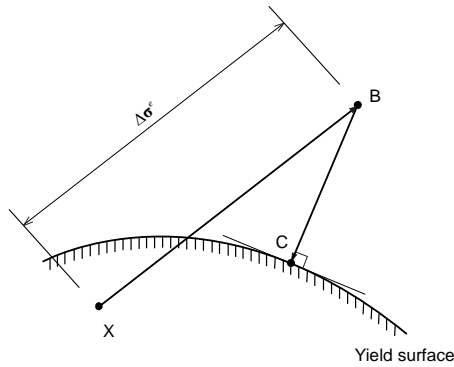


图 1.3.4 隐式向后欧拉方法

当最终应力状态收敛于屈服面时，残余应力向量  $\mathbf{r}$  将逐渐收敛于零。使用台劳级数一次展开式进行反复计算可得新的残余应力向量  $\mathbf{r}_{\text{new}}$  如下。

$$\mathbf{r}_{\text{new}} = \mathbf{r}_{\text{old}} + \dot{\sigma} + \lambda \mathbf{D} \mathbf{m} + \Delta\lambda \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \quad (1.3.17)$$

收敛时的残余应力向量为零，因此将  $\mathbf{r}_{\text{new}} = 0$  代入公式(1.3.17)，则可得如下公式。



$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\left(\mathbf{I} + \Delta\lambda\mathbf{D}\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^{-1}\left(\mathbf{r}_{\text{old}} + \dot{\lambda}\mathbf{D}\mathbf{m}\right) = -\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{r}_{\text{old}} + \dot{\lambda}\mathbf{D}\mathbf{m}\right) \quad (1.3.18)$$

另外，屈服函数按台劳级数一次展开式如下。

$$f_{\text{new}} = f_{\text{old}} + \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial\kappa}\dot{\kappa} = f_{\text{old}} + \mathbf{n}^T\dot{\boldsymbol{\sigma}} + h\dot{\lambda} = 0 \quad (1.3.19)$$

将公式(1.3.18)代入公式(1.3.19)可得如下公式。

$$\dot{\lambda} = \frac{f_{\text{old}} - \mathbf{n}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_{\text{old}}}{h + \mathbf{n}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{m}} \quad (1.3.20)$$

### 1.3.3.7 本构矩阵(constitutive matrix)

塑性本构方程(plastic constitutive equation)可按下面方程推导。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right) = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\mathbf{D}\mathbf{m} \quad (1.3.21)$$

将公式(1.3.9)代入公式(1.3.21)，则可得微小增量应力公式如下。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D}\mathbf{m}\mathbf{n}^T\mathbf{D}}{h + \mathbf{n}^T\mathbf{D}\mathbf{m}}\right)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^{\text{ep}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.3.22)$$

当显示向前欧拉方法的反复计算中使用牛顿-拉普森方法且使用协调切线刚度矩阵(consistent tangent stiffness matrix)时，因其具有二次收敛特性因此收敛速度更快。为了使用二次收敛特性，对公式(1.3.15)进行微分可得如下公式。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\mathbf{D}\mathbf{m} - \Delta\lambda\mathbf{D}\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \Delta\lambda\mathbf{D}\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\lambda}\dot{\lambda} \quad (1.3.23)$$

其中  $\dot{\lambda}$  为  $\Delta\lambda$  的变化量。

重新整理公式(1.3.23)如下。

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\mathbf{D}\bar{\mathbf{m}} \quad (1.3.24)$$

其中， $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \Delta\lambda\mathbf{D}\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$ 、 $\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{m} + \Delta\lambda\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\lambda}$ 。

此时假设  $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}$ ，则重新整理公式(1.3.24)如下。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\bar{\mathbf{m}}) \quad (1.3.25)$$

公式(1.3.25)使用线性化协调条件(linearized consistency condition)整理为全应力形式如下。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left( \mathbf{H} - \frac{\mathbf{H}\bar{\mathbf{m}}\bar{\mathbf{m}}^T\mathbf{H}}{h + \mathbf{n}^T\mathbf{H}\bar{\mathbf{m}}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}^{\text{ep}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.3.26)$$

公式(1.3.22)中  $\mathbf{D}^{\text{ep}}$  为切线刚度矩阵(tangent stiffness matrix)，公式(1.3.26)中的  $\mathbf{C}^{\text{ep}}$  为协调切线刚度矩阵。



# 施工阶段分析

## 2.1 概要

施工阶段分析就是考虑施工过程的数值分析。岩土分析一般为材料非线性分析，而影响非线性分析结果的重要因素除了材料本构外，还有初始条件和施工过程。其中初始条件为岩土施工前的初始状态，其中最重要的参数为原状土的初始应力。在SoilWorks中计算原状土的初始状态(初始应力)时使用的是线弹性材料本构模型。

从原状土的初始应力可得挖掘荷载和莫尔-库伦材料本构中使用的剪切强度。现场的施工过程非常复杂，且随现场条件经常会变更施工计划，施工阶段模拟不可能完全体现与现场一样的条件，应尽量将施工阶段简化，但要包括主要的施工过程。

隧道的施工过程大致如下：

- 第1阶段：原状土应力
- 第2阶段：施工第1隧道面，
- 第3阶段：加固第1隧道面+施工第2隧道面，
- 第4阶段：加固第2隧道面+施工第3隧道面
- 第5阶段：加固第3隧道面+施工第4隧道面
- ..... (反复) .....

SoilWorks的施工阶段模拟中可考虑的因素和功能如下：

### 1. 施工阶段

- 岩土单元的激活和钝化
- 荷载的激活和钝化
- 边界条件的激活和钝化
- 岩土材料特性的变化
- 荷载释放系数
- 各施工阶段地下水位的变化
- 排水、不排水条件

- 位移初始化(归零)
- 原场地的地应力分析(In-situ)
- 接续计算

### 2. 地下水分析

- 各施工阶段的稳定流分析
- 各施工阶段的非稳定流分析

### 3. 应力-渗流耦合分析

- 使用地下水分析得到的孔隙水压进行有效应力分析

### 4. 固结分析

- 堆土过程中的固结分析

当施工过程中有单元、荷载、边界的变化时，要将变化时刻定义为一个施工阶段。各施工阶段内还可以分为子步骤，但是单元、荷载、边界的变化需要定义在各施工阶段的第1个子步骤。

在某个施工阶段建立的单元不受之前施工过程中的单元和应力历程的影响，即新生成的单元的初始应力为零。

拆除(钝化)单元的荷载释放系数为100%时，该单元上的内部应力将重新分配给剩余的单元，将引起剩余单元的应力变化。反之，拆除(钝化)单元的荷载释放系数为0%时，该单元的内部应力将不传递给剩余单元，不会引起剩余单元的应力变化。

通过适当调整应力重新分配比例(荷载释放系数)可调整重新分配给剩余单元的应力。施工阶段过程中挖掉岩土时，由于应力松弛(应力释放)需要时间，应力并不能马上分配给周边岩土。例如隧道开挖过程中应力的释放(重新分配)会分阶段(开挖、施工锚杆、喷混)进行，此时可通过定义各施工阶段的荷载释放系数来模拟这种应力的逐步释放过程。

SoilWorks的施工阶段分析模型并不是独立的，本阶段施工阶段分析是以前次施工阶段结果为初始状态进行分析的。在程序中定义施工阶段时，只需要定义该阶段将要发生变化的单元、荷载、边界条件即可。注意程序中使用“激活”和“钝化”等词汇表示“添加”和“拆除”。

## 2.2 单元的激活和钝化

施工阶段中添加的单元(激活)的初始应力状态为零, 添加的单元的自重施加在已有单元上。

岩土单元在挖掉前存在应力, 挖掉时需要通过应力重新分配, 使新生成的自由面上不产生应力。

如图2.2.1所示, 假设从物体B中挖出物体A, 挖出前两个物体的应力分别为  $\sigma_{AO}$ 、 $\sigma_{BO}$ , 两个物体处于平衡状态, 此时荷载  $F_{AB}$  为维持物体B的应力  $\sigma_{BO}$  所需的由物体A传来的荷载, 同样  $F_{BA}$  作用在物体A上。因此挖掘荷载与单元的应力状态和单元自重有关, 可用公式(2.2.1)定义如下。

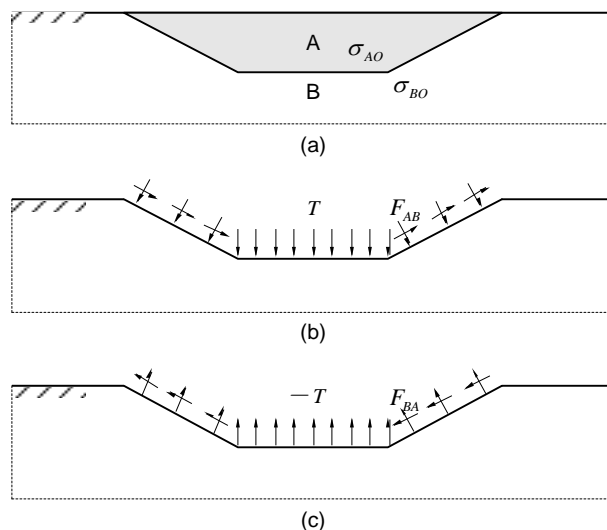


图 2.2.1 拆除单元(钝化)时荷载的作用情况

$$F_{BA} = -\int_{V_A} \mathbf{B}^T \sigma_{AO} dV_A + \int_{V_A} \mathbf{N}^T \gamma dV_A \quad (2.2.1)$$

其中,  $\mathbf{B}$  : 应变-位移关系矩阵

- $V_A$  : 挖掘的体积
- $\mathbf{N}$  : 单元形函数
- $\gamma$  : 岩土的容重

当前施工阶段的刚度如公式(2.2.2)所示由当前阶段的单元的刚度构成。各施工阶段中添加(或删除)的单元的刚度将添加到整体刚度矩阵中(或中刚度矩阵中删除)。

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{L}_i \quad (2.2.2)$$

- 其中,
- $\mathbf{K}$  : 当前施工阶段的刚度矩阵
  - $\mathbf{L}_i$  : 刚度矩阵中单元刚度的位置矩阵
  - $\mathbf{k}_i$  : 当前施工阶段中全部的单元的单元刚度
  - $n$  : 当前施工阶段中存在的单元数量

## 2.3 荷载的激活和钝化

各施工阶段分析是以增量形式表现的，因此需要当前阶段的增量荷载。当前阶段的增量荷载  $\Delta \mathbf{F}^{\text{current}}$  为当前阶段的总荷载  $\mathbf{F}^{\text{current}}$  与前阶段的总荷载  $\mathbf{F}^{\text{previous}}$  的差。

$$\Delta \mathbf{F}^{\text{current}} = \mathbf{F}^{\text{current}} - \mathbf{F}^{\text{previous}} \quad (2.3.1)$$

当前施工阶段的总荷载可分为表面力(surface force)和体力(body force)。

$$\mathbf{F}^{\text{current}} = \mathbf{F}_{\text{surface}}^{\text{current}} + \mathbf{F}_{\text{body}}^{\text{current}} \quad (2.3.2)$$

表面力包含了与节点相关的节点荷载和作用在表面上的分布荷载，体力包含自重等与单元相关的荷载。因此表面力的增加和删除需要有相关节点存在，而体力的增加和删除需要有相关的单元存在。

每个施工阶段内可有很多个增量荷载步骤(incremental load step)，每个增量荷载步骤的荷载考虑已经定义的荷载系数(load factor)  $\alpha$  后可表示如下。

$$\mathbf{F}_i^{\text{current}} = \mathbf{F}^{\text{previous}} + \alpha_i^{\text{current}} \cdot \Delta \mathbf{F}^{\text{current}} \quad (2.3.3)$$

计算任意荷载步骤  $i$  的结构响应使用的静力线性分析方程如下。

$$\mathbf{F}_i^{\text{ubf}} = \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \quad (2.3.4)$$

其中， $\mathbf{K}_i$  为第  $i$  荷载步骤的结构刚度， $\mathbf{d}_i$  为第  $i$  荷载步骤的节点位移。 $\mathbf{F}_i^{\text{ubf}}$  为第  $i$  荷载步骤的不平衡力(unbalance force)，可用当前荷载步骤的总荷载减去前荷载步骤的总荷载而得。

$$\mathbf{F}_i^{\text{ubf}} = \mathbf{F}_i^{\text{current}} - \mathbf{F}_{i-1}^{\text{internal}} \quad (2.3.5)$$

$\mathbf{F}_{i-1}^{\text{internal}}$  为前荷载步骤的结构的总内力，可用前荷载步骤的单元的应力按下面公式计算。

$$\mathbf{F}_{i-1}^{\text{internal}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_j^T \mathbf{f}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_j^T \left( \int_V \mathbf{B}_j^T \boldsymbol{\sigma}_j dV \right) \quad (2.3.6)$$

- 其中,
- $\mathbf{f}_j$  : 单元的构件内力
  - $\mathbf{L}_j$  : 单元荷载在总荷载矩阵中的位置矩阵
  - $\mathbf{B}_j$  : 位移-应变关系矩阵
  - $\boldsymbol{\sigma}_j$  : 单元的应力
  - $V$  : 体积
  - $n$  : 当前施工阶段中存在的单元数量

当  $i=1$  时,  $\mathbf{F}_0^{\text{internal}}$  为前施工阶段的最终荷载步骤的总内力。另外, 在各施工阶段的各荷载步骤结束时将更新单元的应力, 作为下一个施工阶段的初始应力。



## 2.4 边界条件的激活和钝化

与单元和荷载一样，所有施工阶段中的边界条件都会事先保存在数据库中，根据施工阶段的定义程序会从分析模型中添加或删除边界条件。需要注意的是在添加或删除边界条件时有可能会产生自由节点(没有任何信息的节点，例如节点上没有任何荷载、相连单元、约束定义的节点)，自由节点的存在会影响分析速度。当钝化(删除)一端为固端、另一端与单元相连的弹性连接时往往会发生自由节点(固端一侧)，此时应尽量将该自由节点也钝化。

## 2.5 荷载释放系数

如前所述，单元发生变化时对周边单元将产生影响，为了简化施工阶段程序使用了荷载释放系数的概念，将这种影响分步骤的反映给周边单元。一般来说将三维模型简化为二维模型时，或者需要简化三维模型的施工阶段数量时可使用荷载释放系数的概念。

在SoilWorks中可分几个阶段分别定义各阶段的荷载释放系数。

假设开挖后连续三个阶段的荷载释放系数分别为40%、30%、30%，则可在下面对话框中分别输入本阶段、下一阶段、下二阶段(分别输入0、1、2)的荷载释放系数为0.4、0.3、0.3(参见图2.5.1)。



后阶段	荷载释放系数
0	0.4
1	0.3
2	0.3

合计 1

确认 取消

图 2.5.1 定义荷载释放系数的对话框

## 2.6 位移初始化

在施工阶段分析过程中有时需要将位移清零，一般来说初始条件阶段的分析需要将位移清零。

在SoilWorks中可在任意阶段将位移清零，因此初始条件阶段也可以分为多个阶段进行。

## 2.7 材料特性的变化

施工过程中因为岩土의 扰动或改良、岩土随时间的硬化都会引起岩土材料特性的变化。另外，衬砌混凝土会发生硬化、衬砌厚度也会发生变化。

在SoilWorks中可变更单元在不同阶段的特性，变换特性的单元会继承该单元以前的结果(例如位移、应力、应变等)继续分析。

使用非线性材料本构时，在变更材料特性时需要注意。例如有些人在模拟开挖后再填充其他材料时，并不是用钝化和添加单元来模拟，而是使用转换要开挖部分的材料特性来模拟。此时要注意的是非线性材料的前次应力状态为本次分析的初始条件，因此直接将前阶段应力作用在变更了特性的本阶段模型中有可能结果异常。因此，当使用非线性材料模型时，一定要通过激活和钝化来模拟开挖和填充，并在相应阶段变更材料特性。在SoilWorks中激活单元时会将该单元的应力和应变清零后再分析。

## 2.8 原场地应力

计算原场地应力的方法有下面两种方法。

### 2.8.1 $K_0$ 法

$K_0$  法是利用  $K_0$  ( $K_0 = \sigma_h / \sigma_v$ ) 值由竖向应力计算水平应力，从而决定原场地应力的方法。

使用该方法需要首先进行自重分析获得竖向地应力  $\sigma_v$ ，然后利用公式  $\sigma_h = K_0 \sigma_v$  计算水平地应力，剪切应力使用自重分析得到的剪切应力。

使用  $K_0$  法计算原场地应力只有当地表面水平时才准确，当地表面不是水平时获得的原场地应力无法与自重分析得到的应力平衡。为了获得二者的平衡需要将两者的不平衡内力重新进行分析，在程序中可以通过定义一个没有任何条件变化的空阶段(null stage)进行分析，经过空阶段的分析将获得平衡的原场地应力。

## 2.8.2 自重分析法

直接将自重分析结果作为原场地应力的方法。当地表面水平且  $K_0$  取值为  $K_0 = \nu/(1-\nu)$  时，自重分析方法的原场地应力值与  $K_0$  法相同。否则与  $K_0$  法的原场地应力结果会不同，且会存在剪切应力。

一般来说地表面为倾斜时最好使用自重分析法。但是该方法中  $K_0$  值不能大于1，当  $K_0$  值需要大于1时，只能使用  $K_0$  法后再设置空阶段获得平衡状态的原场地应力。

## 2.9 不排水分析

在SoilWorks中可对指定的单元和施工阶段进行不排水分析。

在SoilWorks中进行不排水分析需要经过两个步骤。首先需要在定义材料本构模型时选择不排水条件，其次是在定义施工阶段时选择不排水分析。假如在材料模型中选择了不排水条件，但是在施工阶段中没有选择不排水分析，则程序将进行排水分析。反之，在材料模型中选择了排水条件，而施工阶段中选择了不排水分析时，程序同样也会进行排水分析。即两个步骤中选择的排水和不排水条件不同时，程序将默认进行排水分析。要想进行不排水分析，需要在两个步骤中都选择不排水选项。

另外，不同施工阶段可以使用不同的排水选项，即有的阶段可使用排水条件，有的阶段可使用不排水条件。当前面阶段进行了不排水分析，本阶段使用了排水分析时，可观察到超孔隙水压消散引起孔隙水压减少的现象；当前面阶段进行了排水分析，本阶段使用了不排水分析且增加荷载时，可观察到超孔隙水压增加引起的孔隙水压的变化情况。



# 应力-渗流耦合分析

## 3.1 概要

地下水渗流是由于渗流区域周围的水头差或渗流边界引起的，当发生渗流时水与土之间的摩擦将产生渗透力(seepage force)，并发生位移和应力。对孔隙水压进行积分可得渗透力。

在SoilWorks中可使用渗流分析得到的孔隙水压(pore water pressure)进行渗流效应分析。

总水头(total head)减去位置水头(elevation head)为压力水头(pressure head)，压力水头乘以水的容重为孔隙水压。渗透力集中在总水头急剧减小的渗流边界上，由于该区域的约束压力较小，所以剪切强度和抗拉强度也较小，对于砂土类考虑渗透压力的有效应力(effective stress)分析时很容易发生岩土破坏。因此对已砂土地基，渗流应力分析是地基稳定性分析(analysis for stability)的重要分析内容。

## 3.2 有效应力

孔隙水压对总应力产生影响，根据太沙基(Terzaghi)原理总应力( $\sigma$ )由有效应力( $\sigma'$ )和孔隙水压( $p_w$ )构成。

因为假设水不能承受剪切应力，所以岩土的有效剪切应力等于总剪切应力。所以总应力的公式可表示如下。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \sigma'_{xx} + p_w \\
 \sigma_{yy} &= \sigma'_{yy} + p_w \\
 \sigma_{zz} &= \sigma'_{zz} + p_w \\
 \tau_{xy} &= \tau'_{xy} \\
 \tau_{yz} &= \tau'_{yz} \\
 \tau_{zx} &= \tau'_{zx}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

其中，孔隙水压( $p_w$ )由稳定状态的孔隙水压( $p_{steady}$ )和超孔隙水压( $p_{excess}$ )构成。

$$p_w = p_{steady} + p_{excess} \tag{3.2.2}$$

稳定状态孔隙水压可由地下水分析结果中的压力结果得到，是由地下水面的高度决定的。超孔隙水压发生在不排水材料的应力计算或固结分析中，关于超孔隙水压的计算请参考“2.9 不排水分析”或“固结分析手册”。

### 3.3 基本方程

弹性虎克法则可用下式表示。

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}'_{xx} \\ \dot{\epsilon}'_{yy} \\ \dot{\epsilon}'_{zz} \\ \dot{\gamma}'_{xy} \\ \dot{\gamma}'_{yz} \\ \dot{\gamma}'_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}'_{xx} \\ \dot{\sigma}'_{yy} \\ \dot{\sigma}'_{zz} \\ \dot{\tau}'_{xy} \\ \dot{\tau}'_{yz} \\ \dot{\tau}'_{zx} \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

其中  $E, \nu$  为有效材料特性。

在公式(3.2.2)中稳态成分 ( $p_{steady}$ ) 的微分为零，所以有如下公式。

$$\dot{p}_w = \dot{p}_{excess} \quad (3.3.2)$$

考虑公式(3.2.1)可得如下的微小增量形式的基本方程。

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}'_{xx} \\ \dot{\epsilon}'_{yy} \\ \dot{\epsilon}'_{zz} \\ \dot{\gamma}'_{xy} \\ \dot{\gamma}'_{yz} \\ \dot{\gamma}'_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}'_{xx} - \dot{p}_{excess} \\ \dot{\sigma}'_{yy} - \dot{p}_{excess} \\ \dot{\sigma}'_{zz} - \dot{p}_{excess} \\ \dot{\tau}'_{xy} \\ \dot{\tau}'_{yz} \\ \dot{\tau}'_{zx} \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$



SoilWorks中提供的有限元类型如下。

- 1) **岩土单元(geotechnical element)**
  - ✓ 平面应变单元(plane strain element)
  
- 2) **结构单元(structural element)**
  - ✓ 桁架单元(truss element)
  - ✓ 植入式桁架单元(embedded truss element)
  - ✓ 梁单元(beam element)
  
- 3) **专业单元(applied element)**
  - ✓ 界面单元(interface element)
  - ✓ 桩、锚杆、锚、土钉单元(pile、rock bolt、anchor、nail element)
  - ✓ 桩端单元(pile tip bearing element)
  - ✓ 土工纤维单元(geogrid element)
  - ✓ 弹性连接单元(elastic link)
  - ✓ 刚性连接单元(rigid link)
  - ✓ 节点弹簧单元(spring)

有限单元是由节点构成的。

## 4.1 平面应变单元

### 4.1.1 概要

对于大坝、隧道或者地基等长度很长但沿长度方向截面变化不大的三维模型，可使用平面应变单元(如下图4.1.1所示的阴影部分)将三维问题转化为二维问题进行分析。

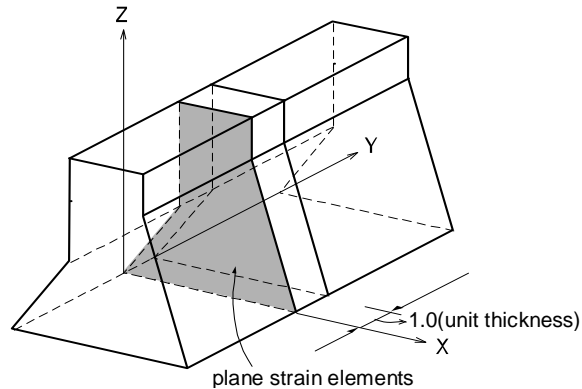


图 4.1.1 二维平面应变单元的厚度

平面应变单元在厚度方向没有应变，但由于泊松效应(Poisson's effect)在厚度方向存在应力。

平面应变单元可以与桁架单元、梁单元、界面单元、弹性边界单元、弹性连接单元等所有结构和专业单元在同一模型中一起使用，也可以用于动力分析、隧道、边坡稳定、软弱地基等分析模块中。

平面应变单元的形状有四边形和三角形单元，具有平面内的抗压、抗拉、抗剪刚度和厚度方向的抗拉、抗压刚度。如图4.1.2所示，平面应变单元应尽量使用四边形单元，或者使用六节点、八节点等高阶单元。单元的形状比应尽量尽可能接近1.0，使形状接近正三角形或正四边形。



### 4.1.2 单元形状、单元坐标系、节点号和单元自由度

SoilWorks中的平面应变单元的形状、单元坐标系、单元自由度和节点号参见图4.1.2。平面应变单元的分析结果的输出以整体坐标系为基准，因此图4.1.2中的单元坐标系没有太大的意义，节点的内力也按整体坐标系方向输出。

平面应变的各节点上只有沿整体坐标系的水平和竖向的平动自由度。

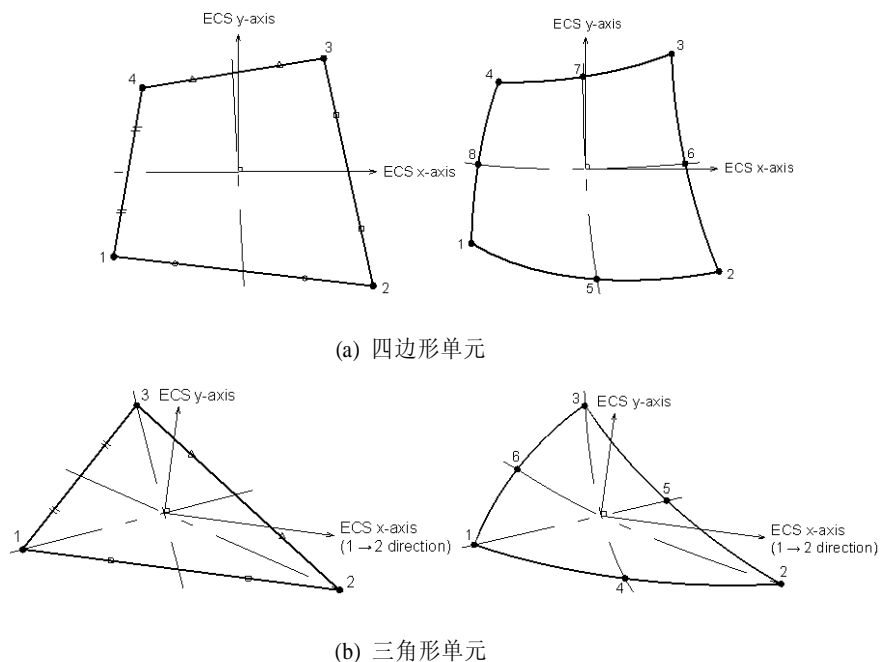


图 4.1.2 平面应变单元的布置及单元坐标系、节点内力

节点号顺序以逆时针方向为基准，高阶单元先编角点号后再编中间节点编号。

在SoilWorks中平面应变单元只适用于二维模型，且单元平面固定为X-Z平面，重力方向固定为-Z方向。

### 4.1.3 单元特性

定义平面应变单元为线弹性材料时所需输入的特性如下：

弹性模量	:	$E$
泊松比	:	$\nu$
单元容重	:	$\gamma_t$
饱和容重	:	$\gamma_{sat}$
初始应力参数	:	$K_0$
热膨胀系数	:	$\alpha$

当赋予为非线性材料时，需要追加的非线性材料参数可参见“第1分册”手册内容。

平面应变单元是假设长度较长的三维模型沿长度方向的法向应变和剪切应变为零，将三维问题简化为二维问题而使用的单元。各向同性线弹性平面应变单元的基本方程如下。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} = 0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.2.1)$$

平面应变单元的结构特性参数为厚度，如图4.1.1所示厚度取垂直于X-Z平面方向的单位宽度，单位由程序自动设置。

### 4.1.4 有限元公式

SoilWorks中的平面应变单元是基于等参平面应变理论(isoparametric plane strain formulation)开发的, 公式如下。

$$t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{u} = bt \int_A \mathbf{N}^T dA + pt \int_L \mathbf{N}^T dL + \mathbf{p}_n \quad (4.1.2)$$

其中,  $L =$  单元边界的长度  
 $t =$  1 (单元厚度)

公式(4.1.2)中的  $\mathbf{N}$  为形函数(shape function), 图4.1.2中的三节点三角形单元和四节点四边形单元的形函数为线性函数, 六节点三角形单元和八节点四边形单元的形函数为二次函数。具体的形函数如下。

✓ 三节点单元

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta \\ N_2 &= \xi \\ N_3 &= \eta \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

✓ 四节点单元

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

✓ 六节点单元

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \quad N_2 = \xi(2\xi - 1) \\ N_3 &= \eta(2\eta - 1), \quad N_4 = 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ N_5 &= 4\xi\eta, \quad N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

✓ 八节点单元

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8 \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6 \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7 \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8 \\
 N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

平面应变单元使用的应变为如下公式所示的工程应变(engineering strain)。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ 0 \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \tag{4.1.7}$$

应变-位移关系矩阵如下。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{np}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{np}}{\partial y} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{np}}{\partial y} & \frac{\partial N_{np}}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{4.1.8}$$

雅可比矩阵如下。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{np}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{np}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{np} & y_{np} \end{bmatrix} \quad (4.1.9)$$

平面应变单元的数值积分公式如下。

$$t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \rightarrow t \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{B}_j | \mathbf{J}_j | W_{1j} W_{2j} \quad (4.1.10)$$

其中  $W_{1j}, W_{2j}$  为积分点上沿  $\xi, \eta$  方向的加权值。

### 4.1.5 单元结果

平面应变单元提供内力、应力、应变，一阶单元和二阶单元输出的内容项相同，输出的结果为整体坐标系结果。

#### 4.1.5.1 单元内力结果

内力结果输出节点的结果，内力符号如图4.1.3所示，箭头方向为正(+)方向。

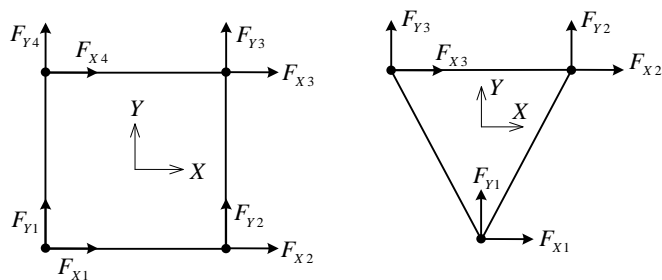


图 4.1.3 平面应变单元的节点内力

#### 4.1.5.2 单元应力和应变结果

单元的应力和应变结果输出的是节点结果，是先通过计算积分点(高斯点)上的结果后通过外插计算推导的节点结果。另外还提供了单元中心点的结果，中心点的结果取自积分点上的值的算术平均值。

应力和应变的符号约定如图4.1.4所示，箭头方向为‘+’方向。

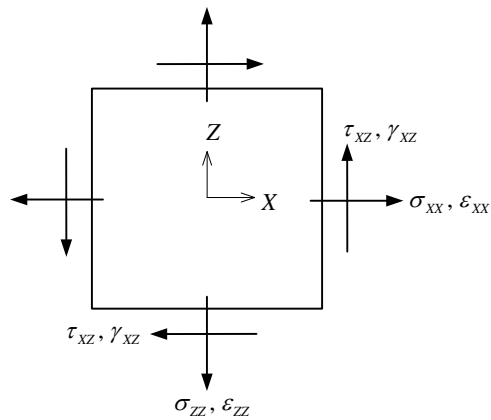


图 4.1.4 平面应变单元的应力和应变的符号约定

各应力结果的说明如下：

- $\sigma'_{XX}$  : 整体坐标系X方向的有效法向应力
- $\sigma'_{YY}$  : 整体坐标系Y方向的有效法向应力
- $\sigma'_{ZZ}$  : 整体坐标系Z方向的有效法向应力
- $\sigma_{XX}$  : 整体坐标系X方向的总法向应力
- $\sigma_{YY}$  : 整体坐标系Y方向的总法向应力
- $\sigma_{ZZ}$  : 整体坐标系Z方向的总法向应力
- $\tau_{XZ} = \tau_{ZX}$  : 整体坐标系X-Z方向的剪切应力

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  : 在主轴1、2、3上的主应力

$$\tau_{\max} : \text{特雷斯卡最大剪应力} = \max \left[ \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right]$$

$$\sigma_{\text{vm}} : \text{范梅塞斯应力} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$$

$$\sigma'_{\text{mean}} : \text{平均有效应力} = \frac{\sigma'_{\text{xx}} + \sigma'_{\text{yy}} + \sigma'_{\text{zz}}}{3}$$

$$\sigma_{\text{mean}} : \text{平均全应力} = \frac{\sigma_{\text{xx}} + \sigma_{\text{yy}} + \sigma_{\text{zz}}}{3}$$

平面应变单元的应变结果如下。

$\varepsilon_{\text{xx}}$  : 整体坐标系X轴方向的法向应变

$\varepsilon_{\text{zz}}$  : 整体坐标系Z轴方向的法向应变

$\gamma_{\text{xz}} = \gamma_{\text{zx}}$  : 整体坐标系X-Z方向的剪切应变

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  : 在主轴1、2、3上的主应变

$$\gamma_{\max} : \text{特雷斯卡最大剪应变} = \max \left[ \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2}, \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2} \right]$$

$$\varepsilon_{\text{dev}} : \text{偏应变} = \sqrt{\frac{2}{9} \left\{ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right\}}$$

$\varepsilon_{\text{vol}}$  : 体应变 =  $\varepsilon_{\text{xx}} + \varepsilon_{\text{yy}} + \varepsilon_{\text{zz}}$

$\varepsilon_{\text{xx}}^{\text{p}}$  : 整体坐标系X方向塑性法向应变

$\varepsilon_{\text{zz}}^{\text{p}}$  : 整体坐标系Z方向塑性法向应变

$\gamma_{\text{xz}}^{\text{p}} = \gamma_{\text{zx}}^{\text{p}}$  : 整体坐标系X-Z方向塑性剪切应变

$\varepsilon_1^{\text{p}}, \varepsilon_2^{\text{p}}, \varepsilon_3^{\text{p}}$  : 在主轴1、2、3上的主塑性应变

$$\varepsilon^{\text{p}} : \text{等效塑性应变} = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^{\text{p}2} + \varepsilon_2^{\text{p}2} + \varepsilon_3^{\text{p}2})}$$

## 4.2 桁架单元

### 4.2.1 概要

桁架单元作为结构单元主要用于模拟锚(anchor)、土钉(nail)、岩石锚杆(rock bolt)、以及不考虑弯曲变形的桩(pile)。另外也用于模拟空间桁架或斜撑，可以进行线性静力分析、非线性静力分析、动力分析。在SoilWorks中的桁架单元为两节点的一阶单元。

桁架单元的节点没有旋转自由度，因此与其他桁架单元或没有旋转自由度的单元连接时，分析过程中会发生奇异(singular error)。在SoilWorks中对这种连接会自动约束其旋转自由度以防止奇异的发生。另外，桁架单元与其他有旋转自由度的单元(例如梁单元)连接时不必采取其他措施也能正常分析。

### 4.2.2 单元形状、单元坐标系、节点号、单元自由度

桁架单元的单元形状和单元坐标系参见图4.2.1。桁架单元作为结构单元，其结果遵循单元坐标系方向，单元坐标系  $x$  轴的方向为由节点1指向节点2。

桁架单元只有沿单元坐标系  $x$  轴方向的一个平动自由度，对其节点作为边界进行约束时，可通过定义节点的局部坐标系，将节点的局部坐标系方向与其轴向一致即可。

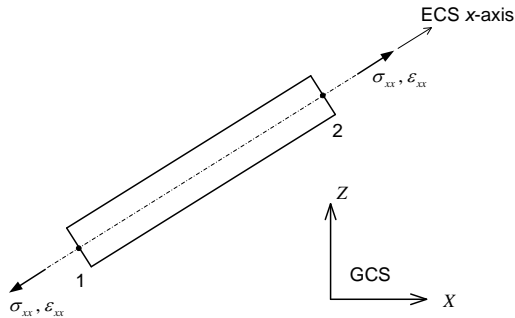


图 4.2.1 桁架单元的坐标系以及应力、应变的符号约定



### 4.2.3 单元特性

桁架单元作为结构单元其线弹性材料特性所需的参数如下。







弹性模量	:	$E$
泊松比	:	$\nu$
容重	:	$\gamma_t$
热膨胀系数	:	$\alpha$

另外，还可以赋予桁架单元一定初始间隙、只受拉或只受压特性、以及非线性弹性特性等。

桁架单元的本构方程如下。

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (4.2.1)$$

桁架单元的结构特性有截面面积和间距。在SoilWorks中支持的截面形状如下，具体尺寸可由用户直接输入。程序默认桁架单元沿长度方向的截面面积不变。

圆形	:	
矩形	:	
圆管	:	
方管	:	
工字形	:	
T形	:	
钢筋	:	直接输入截面面积
钢束	:	直接输入截面面积
用户定义截面	:	直接输入截面面积

间距功能是为了使用二维单元模拟加固构件沿三维布置的效果而输入的参数。例如将桁架单元沿厚度方向每延米布置两根时，间距可输入0.5，分析时对于单位厚度的桁架刚度将取单根桁架单元的两倍。但输出结果时将输出单根桁架的内力结果，因此可直接用于桁架的验算。

#### 4.2.4 有限元公式

桁架单元只有沿单元坐标系  $x$  轴方向的平动位移  $u$ 。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i\} \quad (4.2.2)$$

单元上任意点的坐标  $x$  与平动位移  $u$  的关系可用形函数表示如下。

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i, \quad u = \sum_{i=1}^2 N_i u_i \quad (4.2.3)$$

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (4.2.4)$$

节点位移和应变的关系如下。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (4.2.5)$$

矩阵  $\mathbf{B}_i$  可对形函数的微分获得。

$$\mathbf{B}_i = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} \quad (4.2.6)$$

单元的轴向刚度矩阵计算公式如下。

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{L_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dL, \quad \mathbf{D} = A \{E\} \quad (4.2.7)$$

其中，

$$\begin{aligned} A & : \text{截面面积} \\ L_e & : \text{单元长度} \end{aligned}$$

可将公式(4.2.7)整理如下。

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

## 4.2.5 单元结果

桁架单元的分析结果提供节点上的单元内力、应力和应变，方向为单元坐标系方向。

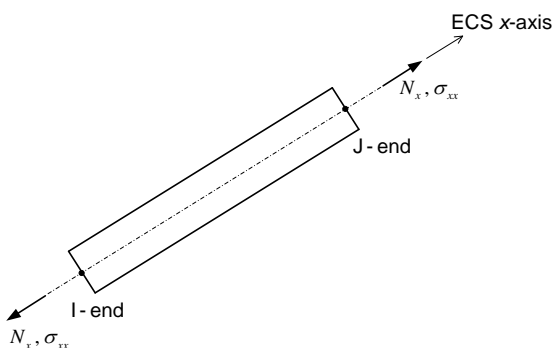


图 4.2.2 桁架单元的结果输出位置及成分

### 4.2.5.1 单元内力结果

输出的单元内力为轴力  $N_x (= A\sigma_{xx})$ ，如图4.2.2所示受拉为正‘+’，两端的轴力因为自重的影响有可能不同。

### 4.2.5.2 单元应力和应变结果

需要注意的是桁架的应力计算点仅有一个，因此桁架单元的应力  $\sigma_{xx}$  和总应变  $\varepsilon_{xx}$  沿杆件全长是相同的。当选择了非线性材料时还将输出塑性应变  $\varepsilon_{xx}^p$ 。

## 4.3 植入式桁架单元

### 4.3.1 概要

植入式桁架单元与桁架单元类似主要用于模拟锚、土钉、锚杆等不考虑抗弯性能的单位，单元形状、单元坐标系、需要输入的特性也与桁架单元相同。另外也可以定义间隙、只受拉或只受压、非线性弹性等非线性等性。

植入式桁架单元不必像一般桁架单元那样必须与其他单元共享节点，植入式桁架单元寻找母体单元中最近的节点自动进行自由度耦合。

### 4.3.2 有限元公式

在Soilworks中，植入式单元的母体单元(mother element)为平面应变单元。

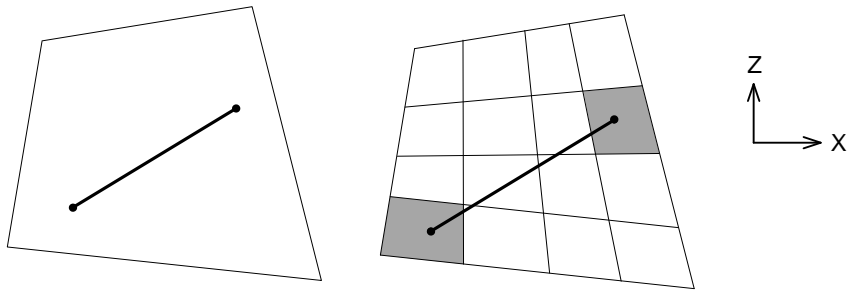


图 4.3.1 母体单元内的植入式桁架单元

植入式单元的节点必须在母体单元内，下面说明中将植入式单元用下标‘tru’表示，母体单元用下标‘mot’表示。

在母体单元坐标系中，母体单元具有  $x$ 、 $y$  方向的平动位移  $u$ 、 $v$ 。

$$\mathbf{u}_{mot}^i = \{u_{mot}^i, v_{mot}^i\} \quad (4.3.1)$$

母体单元和桁架单元之间的坐标转换矩阵可使用方向向量  $\mathbf{d}$  计算如下。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

因为桁架单元只有一个方向平动自由度，所以将上式简化如下。

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2\} \quad (4.3.3)$$

在母体单元的等参坐标系中，桁架单元的节点坐标系可表示如下。

$$\mathbf{a}_{tru}^i = \{\xi^i, \eta^i\} \quad (4.3.4)$$

因此，在母体单元坐标系中桁架单元的平动位移如下。

$$\begin{aligned} u_{tru} &= \sum_{i=1}^{N_{mot}} N_{mot}^i(\xi^i, \eta^i) u_{mot}^i \\ v_{tru} &= \sum_{i=1}^{N_{mot}} N_{mot}^i(\xi^i, \eta^i) v_{mot}^i \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

在桁架单元坐标系中，桁架单元的平动位移可利用转换矩阵计算如下。

$$\hat{\mathbf{u}}_{tru} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_{tru} \quad (4.3.6)$$

节点位移  $\hat{\mathbf{u}}_{tru}$  和应变  $\boldsymbol{\varepsilon}_{tru}$  的关系可由应变-位移关系矩阵  $\mathbf{B}_{tru}^i$  计算如下。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tru} = \sum_{i=1}^{N_{tru}} \hat{\mathbf{B}}_{tru}^i \mathbf{u}_{tru}^i \quad (4.3.7)$$

应变-位移关系矩阵  $\mathbf{B}_{tru}^i$  可用形函数的微分表示如下。

$$\mathbf{B}_{tru}^i = \left[ \frac{\partial N_{tru}}{\partial x_{tru}} \right] \quad (4.3.8)$$

植入式桁架单元单元的刚度矩阵如下。

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{L_{tru}} (\mathbf{B}_{tru} \mathbf{T} \mathbf{N}_{mot})^T \mathbf{D} (\mathbf{B}_{tru} \mathbf{T} \mathbf{N}_{mot}) dL_{tru}, \quad \mathbf{D} = A[E] \quad (4.3.9)$$

其中  $A$  为截面面积， $L_{tru}$  为桁架单元的长度。

### 4.3.3 单元结果

植入式桁架单元的分析结果提供单元两端的沿单元坐标系方向的单元内力、应力和应变。

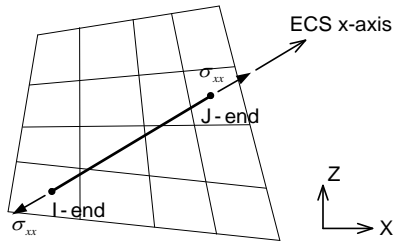


图 4.3.2 植入式桁架单元的输出内容和输出位置

#### 4.3.3.1 单元内力

植入式桁架的内力结果为轴力  $N_x (= A\sigma_{xx})$ ，且受拉时为‘+’。两端的轴力因为自重有可能不同。

#### 4.3.3.2 单元应力和应变

与一般桁架单元一样，植入式桁架单元的应力  $\sigma_{xx}$  和总应变  $\epsilon_{xx}$  沿杆件全长也是相同的。当选

择了非线性材料时还将输出塑性应变  $\varepsilon_{xx}^p$ 。

## 4.4 梁单元

### 4.4.1 概要

梁单元一般用于模拟长度远大于截面尺寸的可以承受弯曲变形的构件。在岩土领域主要用于模拟挡土墙、桩、隧道衬砌、暗渠等岩土中的结构物。梁单元的每个节点具有六个自由度。

程序中梁单元默认采用铁摩辛柯梁理论(垂直于中和轴的截面变形后维持平面形状但可不垂直于中和轴),即默认考虑剪切变形。如果要忽略剪切变形的影响可将剪切面积输入为零。一般来说梁高大于长度的1/5时剪切变形的影响变大,此时用平面应变单元模拟结果会更准确一些。

梁单元的抗扭刚度(torsional resistance)与截面的极惯性矩(polar moment of inertia)不是同一概念(圆形及圆环形截面的上述两个特性仅是数据相同而已),用户自行输入数据时应注意。

刚性梁单元(rigid beam element)的刚度可取周边单元刚度的 $10^5\sim 10^8$ 倍,以不产生过大的数值分析误差为基准。

### 4.4.2 单元形状、单元坐标系、单元自由度

梁单元的各节点沿着单元坐标系方向具有三个平动自由度和三个旋转自由度。节点1指向节点2的方向为单元坐标系的 $x$ 轴,垂直于 $x$ 轴和 $Z$ 轴构成的平面的方向为 $y$ 轴, $z$ 轴可用右手法则决定。当 $x$ 轴与 $Z$ 轴平行时, $y$ 轴与 $Y$ 轴平行, $z$ 轴可用右手法则决定。



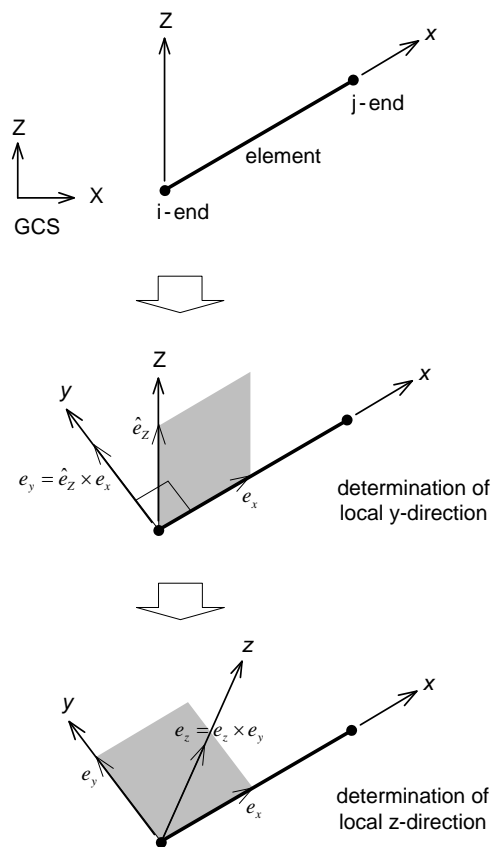


图 4.4.1 单元坐标系示意图

### 4.4.3 单元特性

梁单元的线弹性特性所需的材料特性参数如下。

弹性模量 :  $E$   
 泊松比 :  $\nu$   
 容重 :  $\gamma_t$

热膨胀系数 :  $\alpha$

梁单元的结构方面的特性有刚度特性和间距参数。在SoilWorks中提供各种截面形状的数据库, 且支持变截面, 用户只需要输入截面尺寸, 程序会自动计算截面的刚度值。用户也可以直接输入单元的刚度值。梁单元的刚度数据如下:

截面面积 :  $A$

扭矩常数 :  $I_x$

绕单元坐标轴y轴的惯性矩:  $I_y$

绕单元坐标系z轴的惯性矩:  $I_z$

单元坐标系y轴方向的有效剪切面积:  $A_y$

单元坐标系z轴方向的有效剪切面积:  $A_z$

间距功能与桁架单元相同。

#### 4.4.4 有限元公式

SoilWorks中的梁单元可以受拉、受压、受弯、受剪、受扭, 默认采用铁摩辛柯梁理论, 下面介绍X-Z平面上的二维梁单元的有限元公式。

假设单元的变形互相独立, 公式如下。

$$u = z\beta_y(x) \quad \text{and} \quad w = w(x) \tag{4.4.1}$$

其中,

- $u$  : x方向位移
- $z$  : z方向坐标
- $\beta_y$  : 绕y轴的旋转角
- $w$  : z方向位移

应变公式如下。

$$\begin{aligned}\varepsilon_b = \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial x} = z \kappa_y \\ \gamma_s = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_y\end{aligned}\quad (4.4.2)$$

其中,

- $\varepsilon_b$  : 弯曲引起的轴向应变
- $\gamma_s$  : 剪切应变
- $\kappa_y$  : 绕y轴的曲率

弯矩与曲率、剪力与剪切变形的关系如下。

$$\begin{aligned}M_y &= D_b \kappa_y = EI \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ V_y &= D_s \bar{\gamma}_{xz} = GA_s \bar{\gamma}_{xz}\end{aligned}\quad (4.4.3)$$

其中,

- $D_b$  : 抗弯刚度
- $D_s$  : 抗剪刚度
- $E$  : 弹性模量
- $I$  : 截面惯性矩
- $G$  : 剪切模量
- $A_s$  : 剪切面积

假设两个节点的梁的旋转位移形函数如下。

$$\begin{aligned}\beta_y &= N_1 \beta_{y1} + N_2 \beta_{y2} + N_3 \Delta \beta_{y3} \\ N_1 &= \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2}, \quad N_3 = 1-\xi^2\end{aligned}\quad (4.4.4)$$

使用形函数利用公式(3.3.2)可得曲率如下。

$$\begin{aligned}
 \kappa_y &= \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_{y1} + \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_{y2} + \frac{\partial N_3}{\partial x} \Delta\beta_{y3} \\
 &= J^{-1} \left( \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \beta_{y1} + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \beta_{y2} + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \Delta\beta_{y3} \right) \\
 &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_{y1} \\ w_2 \\ \beta_{y2} \end{Bmatrix} + J^{-1} \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \Delta\beta_{y3} \\
 &= \mathbf{B}_{b\beta} \mathbf{u} + B_{b\Delta\beta} \Delta\beta_{y3}
 \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

其中,  $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{l}{2}$  (Jacobian operator)

另外, 剪切应变可按如下公式计算。

$$\bar{\gamma}_{xz} = \frac{V_y}{D_s} = \frac{1}{D_s} \frac{\partial M_y}{\partial x} = \frac{D_b}{D_s} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} \tag{4.4.6}$$

假设转角  $\beta_y$  为沿单元长度方向长度的二阶函数。

$$\beta_y = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \beta_{y1} + \frac{x}{l} \beta_{y2} + 4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \Delta\beta_{y3} \tag{4.4.7}$$

将公式(4.4.7)代入公式(4.4.6)可得剪切应变如下。

$$\bar{\gamma}_{xz} = B_{s\Delta\beta} \Delta\beta_{y3} = -\frac{2}{3} \phi_3 \Delta\beta_{y3}, \quad \phi_3 = \frac{D_b}{D_s} \frac{12}{l^2} = \frac{12EI}{GA_s l^2} \tag{4.4.8}$$

剪切应变需要满足下列约束条件。

$$\int_0^l (\gamma_{xz} - \bar{\gamma}_{xz}) dx = 0 \quad (4.4.9)$$

因此可得如下公式。

$$w_2 - w_1 + \frac{l}{2}\beta_{y1} + \frac{l}{2}\beta_{y2} + \frac{2}{3}l(1+\phi_3)\Delta\beta_{y3} = 0 \quad (4.4.10)$$

中央节点的旋转角可由其他节点的旋转角表示如下。

$$\Delta\beta_{y3} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \frac{1}{\frac{2}{3}l(1+\phi_3)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l}{2} & -1 & -\frac{l}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_{y1} \\ w_2 \\ \beta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (4.4.11)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\Delta\beta}^{-1} \mathbf{A}_w$$

$$\mathbf{A}_{\Delta\beta} = \mathbf{A}_{\Delta\beta} = \frac{2}{3}l(1+\phi_3), \quad \mathbf{A}_w = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l}{2} & -1 & -\frac{l}{2} \end{bmatrix}$$

由公式(4.4.5)和公式(4.4.8)可得曲率和剪切应变公式如下。

$$\begin{aligned} \kappa_y &= \mathbf{B}_{b\beta} \mathbf{u} + B_{b\Delta\beta} \mathbf{A}\mathbf{u} = (\mathbf{B}_{b\beta} + B_{b\Delta\beta} \mathbf{A}) \mathbf{u} = \mathbf{B}_b \mathbf{u} \\ \bar{\gamma}_{xz} &= B_{s\Delta\beta} \mathbf{A}\mathbf{u} = (\mathbf{B}_{s\Delta\beta} \mathbf{A}) \mathbf{u} = \mathbf{B}_s \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

其中，

$\mathbf{B}_b$  : 曲率-位移关系矩阵

$\mathbf{B}_s$  : 剪切应变-位移关系矩阵

刚度矩阵可按下面公式计算。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \\ \mathbf{K}_b &= \int_0^l \mathbf{B}_b^T D_b \mathbf{B}_b dx, \quad \mathbf{K}_s = \int_0^l \mathbf{B}_s^T D_s \mathbf{B}_s dx \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

最终可得如下形式的梁刚度矩阵。

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{1 + \phi_3} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ & \frac{4}{l} \left( 1 + \frac{\phi_3}{4} \right) & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \left( 1 - \frac{\phi_3}{2} \right) \\ & & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \text{Sym.} & & & \frac{4}{l} \left( 1 + \frac{\phi_3}{4} \right) \end{bmatrix} \quad (4.4.14)$$

以上的刚度矩阵均为单元坐标系方向的矩阵。

### 4.4.5 单元结果

对于梁单元程序提供单元内力及应力结果。

#### 4.4.5.1 单元内力

输出的单元内力如下，符号规定参见图4.4.2，箭头方向为正方向(+).

- $F_x$  : 单元坐标系  $x$  方向轴力
- $F_y, F_z$  : 单元坐标系  $y, z$  方向剪力
- $M_x$  : 绕单元坐标轴  $x$  的扭矩
- $M_y, M_z$  : 绕单元坐标轴  $y, z$  的弯矩

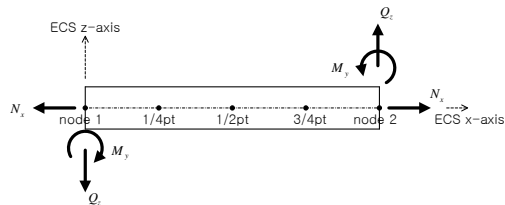
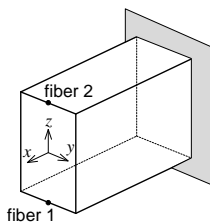


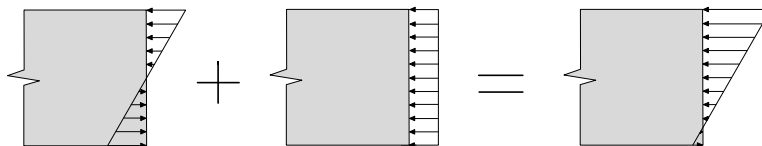
图 4.4.2 梁单元的单元坐标系及单元内力(或应力)的输出位置及符号约定

## 4.4.5.2 单元应力

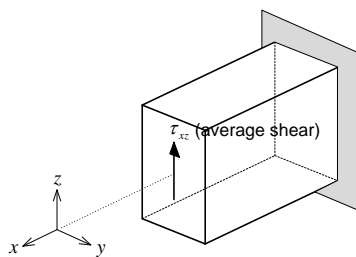
单元应力的符号约定与单元内力相同。但是弯曲应力受拉为正、受压为负。如图4.4.3(a)所示，截面应力输出位置为截面外轮廓的四个角点1、2、3、4。如图4.4.3(b)所示，梁截面上的法向应力是弯曲应力和轴向应力之和。如图4.4.3(c)所示，剪切应力取截面内的剪切应力平均值。



(a) location of stress output



(b) concept of combined bending and axial stresses



(c) shear stress

图 4.4.3 梁单元的应力

Fx	:	轴力
Fz	:	剪力
My	:	弯矩
Sax	:	单元坐标 $x$ 方向应力 ( $\sigma_{xx}$ )
Ssz	:	单元坐标 $z$ 方向剪切应力 ( $\tau_{xz}$ )
Bending Sbz+	:	绕单元坐标轴 $y$ 轴的弯矩 ( $M_y$ ) 计算的弯曲应力(+方向)[位置 3]
Bending Sbz-	:	绕单元坐标轴 $y$ 轴的弯矩 ( $M_y$ ) 计算的弯曲应力(-方向)[位置 4]
Combined Max	:	四个位置1、2、3、4中的最大、最小组合应力(弯曲+轴向)
Combined 1	:	位置1上的组合应力(弯曲+轴向)
Combined 2	:	位置2上的组合应力(弯曲+轴向)



## 4.5 界面单元

### 4.5.1 概要

不同材料之间或者刚度相差较大的材料之间会发生滑动，在SoilWorks中提供可以模拟这种滑动的古德曼(Goodman)界面单元。界面单元不用细分网格，可以使用厚度为零的单元。

界面单元的剪应力超过其抗剪强度时将发生塑性流动。另外，界面单元受拉时其法向刚度和剪切刚度都将变为零，界面将不再能承受任何外力。界面单元也可以用于模拟节理岩。

界面单元连接的厚度为零，因此数值分析时使用的是罚刚度(penalty stiffness)。罚刚度过大时数值分析时不容易收敛，罚刚度过小时界面单元的相对位移结果会不准确。所以需要用户输入适当的罚刚度。在SoilWorks中推荐的罚刚度为  $\mathbf{k} = 10 \times \mathbf{E} / \mathbf{d}_v$ 。此时  $\mathbf{E}$  值为模型单元中最小的杨氏模量， $\mathbf{d}_v$  为单元的假想厚度。在计算罚刚度中使用的假想厚度一般使用 0.1 ~ 1。所谓的假想厚度并不是真实的单元厚度，而是调整罚刚度大小的系数。使用假想厚度的原因是弹性模量的单位为  $N/m^2$ ，而罚刚度的单位  $N/m^3$ ，需要协调单位。

界面单元的相对位移  $\Delta \mathbf{u}$  和界面力(traction)  $\mathbf{t}$  的关系公式如下。

$$\mathbf{t} = \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (4.5.1)$$

$\mathbf{t}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\Delta \mathbf{u}$  值见下面公式，界面上的积分点上的相对位移和界面力参见图4.5.1。

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{Bmatrix} \quad (4.5.2)$$

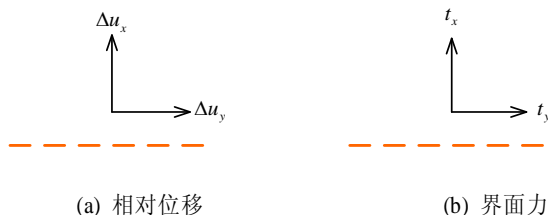


图 4.5.1 线形界面单元的相对位移和界面力

其中,

虚线	: 接触界面
$t_x$	: 法向界面力 [ $N/m^2$ ]
$t_y, t_z$	: 切向界面力 [ $N/m^2$ ]
$\Delta u_x$	: 法向相对位移 [ $m$ ]
$\Delta u_y$	: 切向相对位移 [ $m$ ]

公式(4.5.2)中, 各方向之间互相独立, 即法向的界面力对切向的位移没有影响。

### 4.5.2 单元坐标系、单元形状、单元自由度

如图4.5.3所示, 线形界面单元(line interface element)有四节点的一阶单元和六节点的二阶单元。线形界面单元可用于模拟平面单元之间的接触、平面单元与线单元之间的接触。

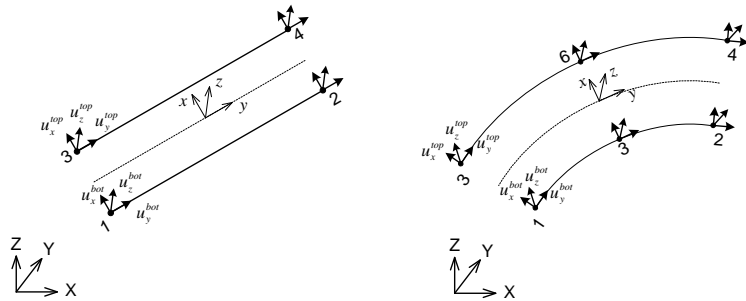


图 4.5.3 线形界面单元

### 4.5.3 单元特性

界面单元的结构特性程序内部为了计算使用了单位厚度。界面单元的材料特性如下。

$k_x$	: 单元坐标系 $x$ 方向的刚度
$k_y$	: 单元坐标系 $y$ 方向的刚度

#### 4.5.4 有限元公式

单元坐标系上的界面力可用界面单元的相对位移  $\Delta u_x$ 、 $\Delta u_y$  和刚度矩阵  $\mathbf{D}$  计算如下。

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{Bmatrix} \quad (4.5.3)$$

对界面单元的应变能(strain energy)变分可得刚度矩阵如下。

$$\mathbf{K}_{inter} = \int_{\Gamma} \mathbf{B}_{inter}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{inter} d\Gamma \quad (4.5.4)$$

内力计算公式如下：

$$\mathbf{F}_{inter} = \int_{\Gamma} \mathbf{B}_{inter}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (4.5.5)$$

将公式(4.5.4)和(4.5.5)可重新表示如下。

$$\mathbf{K}_{inter} = \sum_{j=1}^{N_{ip}} \mathbf{B}_{inter}^j T \mathbf{D} \mathbf{B}_{inter}^j \det \mathbf{J}^j \mathbf{W}^j \quad (4.5.6)$$

$$\mathbf{F}_{inter} = \sum_{j=1}^{N_{ip}} \mathbf{B}_{inter}^j \mathbf{t} \det \mathbf{J}^j \mathbf{W}^j \quad (4.5.7)$$

其中，

$N_{ip}$  : 界面单元的积分点数

$\mathbf{B}_{inter}$  : 相对位移-位移关系矩阵

刚度矩阵  $\mathbf{D}$  见公式(4.5.2)，线形界面单元任意点的坐标可用形函数表示如下。

$$\begin{aligned} x^{bot} &= N_1^{bot} \cdot x_1^{bot} + N_2^{bot} \cdot x_2^{bot} (+N_5^{bot} \cdot x_5^{bot}) \\ x^{top} &= N_3^{top} \cdot x_3^{top} + N_4^{top} \cdot x_4^{top} (+N_6^{top} \cdot x_6^{top}) \\ y^{bot} &= N_1^{bot} \cdot y_1^{bot} + N_2^{bot} \cdot y_2^{bot} (+N_5^{bot} \cdot y_5^{bot}) \\ y^{top} &= N_3^{top} \cdot y_3^{top} + N_4^{top} \cdot y_4^{top} (+N_6^{top} \cdot y_6^{top}) \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

其中，括号内的坐标用于高阶单元。位移公式如下：

$$\begin{aligned}
 u^{bot} &= N_1^{bot} \cdot u_1^{bot} + N_2^{bot} \cdot u_2^{bot} (+N_5^{bot} \cdot u_5^{bot}) \\
 u^{top} &= N_3^{top} \cdot u_3^{top} + N_4^{top} \cdot u_4^{top} (+N_6^{top} \cdot u_6^{top}) \\
 v^{bot} &= N_1^{bot} \cdot v_1^{bot} + N_2^{bot} \cdot v_2^{bot} (+N_5^{bot} \cdot v_5^{bot}) \\
 v^{top} &= N_3^{top} \cdot v_3^{top} + N_4^{top} \cdot v_4^{top} (+N_6^{top} \cdot v_6^{top})
 \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

线形界面单元的等参数形函数如下：

$$\begin{aligned}
 N_1^{bot}(\xi) &= N_3^{top}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \\
 N_2^{bot}(\xi) &= N_4^{top}(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)
 \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

高阶单元的形函数如下(5、6点为高阶节点)：

$$\begin{aligned}
 N_1^{bot}(\xi) &= N_3^{top}(\xi) = -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi \\
 N_2^{bot}(\xi) &= N_4^{top}(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)\xi \\
 N_5^{bot}(\xi) &= N_6^{top}(\xi) = (1-\xi^2)
 \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

在SoilWorks中界面单元的积分方法使用牛顿-科特斯法(Newton-Cotes method)，积分点在节点上。

### 4.5.5 单元结果

界面单元的输出结果有界面力、相对位移、塑性相对位移。

✓ 界面力

$t_x$  : 单元坐标系  $x$  方向界面力

$t_y$  : 单元坐标系  $y$  方向界面力

✓ 相对位移

$\Delta u_x$  : 单元坐标系  $x$  方向相对位移

$\Delta u_y$  : 单元坐标系  $y$  方向相对位移

$\Delta u_x^p$  : 单元坐标系  $x$  方向塑性相对位移

$\Delta u_y^p$  : 单元坐标系  $y$  方向塑性相对位移

## 4.6 桩、锚、土钉、锚杆单元

### 4.6.1 概要

为了模拟桩与岩土的连接，过去一般使用梁单元模拟桩，且梁单元与岩土单元要共享相同节点，然后使用线形界面单元分离梁单元和岩土单元。这样的建模过程不仅复杂而且要求建模者拥有较为丰富的理论知识和建模经验。SoilWorks中的桩单元采用植入式梁单元直接埋入岩土单元中且不必与岩土单元共享节点，在梁单元的节点和埋入位置(假想节点)之间程序自动加入线形界面单元，用于模拟接触的非线性特性。

桩单元也可以作为锚、土钉、锚杆单元使用，这些单元之间的差异仅是界面的材料特性不同。为了用词的统一性，今后都称为桩单元。

在SoilWorks中的桩单元由植入式梁单元和与岩土单元相连的线形界面单元构成(参见图4.6.1)。

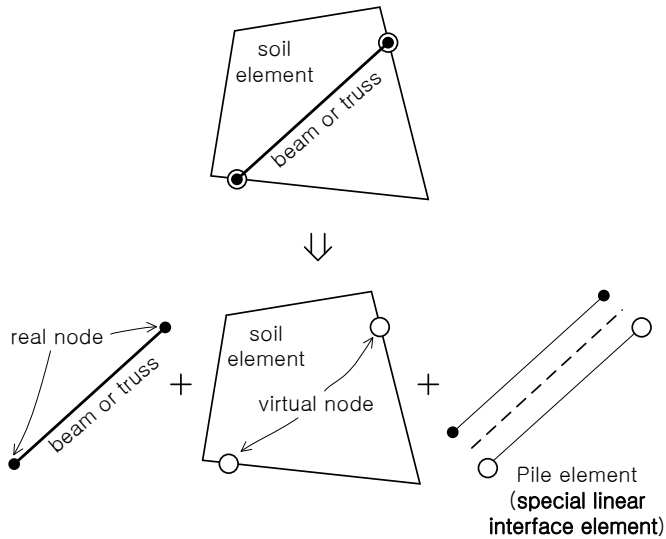


图 4.6.1 桩单元

### 4.6.2 单元形状、单元坐标系、单元自由度

如图4.6.1所示，界面单元是在梁单元的节点和岩土单元上的埋入位置的假想节点之间的线形单元。在SoilWorks的桩单元的界面单元是由两个假想节点(在岩土单元上)和两个实际节点(梁单元节点)组成的低阶四节点线形界面单元。

如图4.6.2所示，由i-end指向j-end的方向为单元坐标系  $x$  轴，垂直于  $x$  轴和整体坐标系  $Y$  轴构成的平面的方向为单元坐标系  $y$  轴方向。当  $x$  轴与  $Z$  轴平时， $y$  轴与整体坐标系  $X$  轴平行。单元自由度参见图4.6.2。

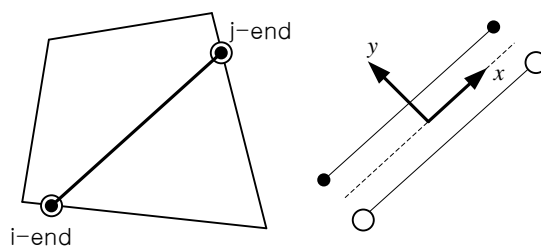


图 4.6.2 桩单元的坐标系

### 4.6.3 单元特性

桩单元的线性界面单元的界面刚度即可以输入如下的常量，也可以输入随位移变化的函数(参照材料手册中对本构模型的说明)。桩单元沿深度方向可输入统一的材料特性如下。

- $k_x$  : 单元坐标系  $x$  方向刚度
- $k_y$  : 单元坐标系  $y$  方向刚度

#### 4.6.4 有限元公式

作为桩单元的母体单元的平面应变单元类型如下。

- ✓ 三节点、六节点三角形单元
- ✓ 四节点、八节点三角形单元

桩单元中的结构单元类型如下：

- ✓ 两节点桁架单元
- ✓ 两节点梁单元

界面单元的整体坐标系如下。

$$\mathbf{X} = \{X \quad Z\} \tag{4.6.1}$$

界面单元的单元坐标系可使用整体坐标表示如下。

$$\mathbf{x} = \{x_1(X_1, Z_1) \quad x_2(X_2, Z_2)\} \tag{4.6.2}$$

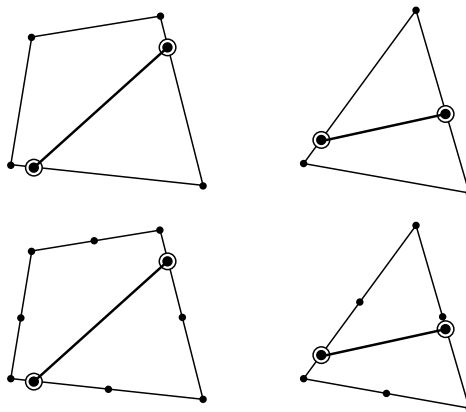


图 4.6.3 岩土单元和线单元的接触界面单元类型



整体坐标轴可表示如下。

$$\mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (4.6.3)$$

单元坐标轴为正交矩阵，可表示如下。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.6.4)$$

节点坐标用单元坐标可表示如下。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_1(x_1^1, x_2^1) \quad x_2(x_1^2, x_2^2)\} \\ &= \begin{bmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{bmatrix} \{x_1(X_1^1, X_2^1) \quad x_2(X_1^2, X_2^2)\}^T \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

线性形函数的形状和公式如下。

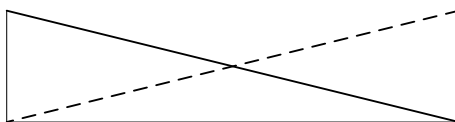


图 4.6.4 线性形函数的形状

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

高斯积分点的形函数可用  $N_k^l$  表示，其中  $k$  为节点号， $l$  为积分点号，积分点有两个时  $l=1,2$ 。

节点的坐标  $a_i^k$  同样也可以用节点号  $k$  和自由度号  $l$  表示，平面应变单元有两个平动自由度。

$$\mathbf{a}^l = \left\{ \sum_{k=1}^3 a_1^k N_k^l, \sum_{k=1}^3 a_2^k N_k^l \right\} \quad (4.6.7)$$

$\mathbf{a}^l$  为单元坐标系线单元的高斯积分点坐标。因为在平面应变单元的等参坐标系上已知线单元积分点的坐标，所以可以利用平面应变单元的节点坐标表示线单元的积分点的坐标。

假设线单元的高斯积分点的等参坐标系坐标如下。

$$\mathbf{a}^l = \{\xi^l, \eta^l\} \quad (4.6.8)$$

假设母体单元为六节点三角形单元，其形函数标记如下。

$${}^6 N_k^l \quad (4.6.9)$$

其中， $k$  为形函数参数， $l$  为积分点参数。当两节点桩单元穿过六节点三角形单元时，相对位移-位移关系矩阵表示如下。

$$\mathbf{B}^l = \begin{bmatrix} -{}^6 N_1^l & 0 & \dots & -{}^6 N_6^l & 0 & N_1^l & 0 & N_2^l & 0 \\ 0 & -{}^6 N_1^l & \dots & 0 & -{}^6 N_6^l & 0 & N_1^l & 0 & N_2^l \end{bmatrix} \quad (4.6.10)$$

平面应变单元-梁单元的界面单元的切线刚度矩阵表示如下。

$$\mathbf{K}_l = \sum_{l=1}^{np} \mathbf{B}^{lT} \mathbf{T} \mathbf{B}^l W_l \det \mathbf{J}_l \quad (4.6.11)$$

其中， $\mathbf{K}_l$  为切线刚度矩阵， $W_l$  为重量， $\mathbf{T}$  为相对位移-摩擦力关系矩阵。

桩单元的材料本构可使用线性弹性材料模型和非线性弹性材料模型，其相对位移-摩擦力的关系矩阵可表示如下。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (4.6.12)$$

对于三维结构一个法向、两个切向的内力和变形的关系公式如下。

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{Bmatrix} \quad (4.6.13)$$

### 4.6.5 单元结果

桩单元除了提供桩单元本身的结果外(参照梁单元说明)，还提供界面单元上的界面力(traction)和相对位移结果。

- $t_x$  : 单元坐标系  $x$  方向的界面力
- $t_y$  : 单元坐标系  $y$  方向的界面力
- $\Delta u_x$  : 单元坐标系  $x$  方向的相对位移
- $\Delta u_y$  : 单元坐标系  $y$  方向的相对位移

## 4.7 桩端支承单元(pile tip bearing element)

### 4.7.1 概要

桩单元与岩土单元的连接除了用沿桩单元全长的线形界面单元模拟外，其端部与岩土单元的连接需要使用岩土单元-节点的界面单元进行模拟。在SoilWorks中勾选桩端支承效应时，如图4.7.1所示，在桩端将自动添加岩土-节点桩端支承单元(Pile tip bearing)。需要注意的是建立桩单元时程序默认第二个点为桩端，因此如果使用桩端支承单元时，建立桩单元时需要格外注意建模的先后顺序。

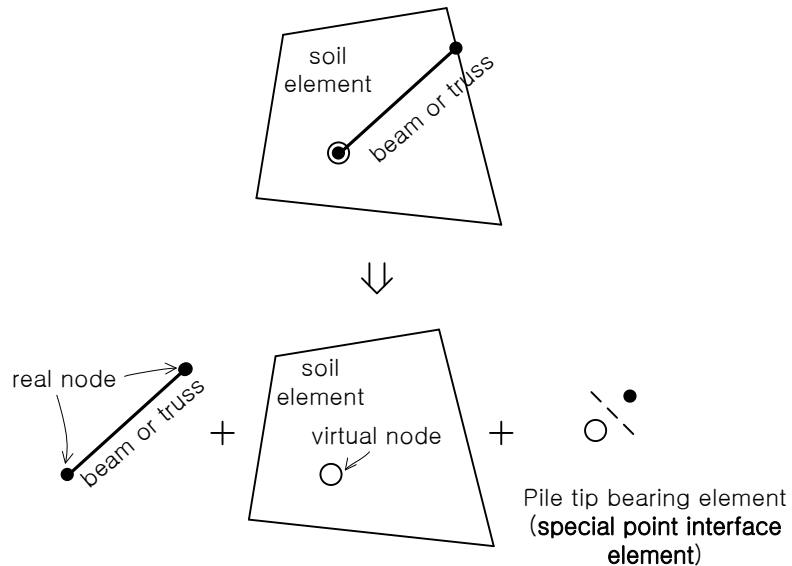


图 4.7.1 勾选桩端效应选项时桩单元的构成示意图

### 4.7.2 单元形状、单元坐标系、单元自由度

如图4.7.2所示，桩端单元可以用于所有平面应变单元类型。

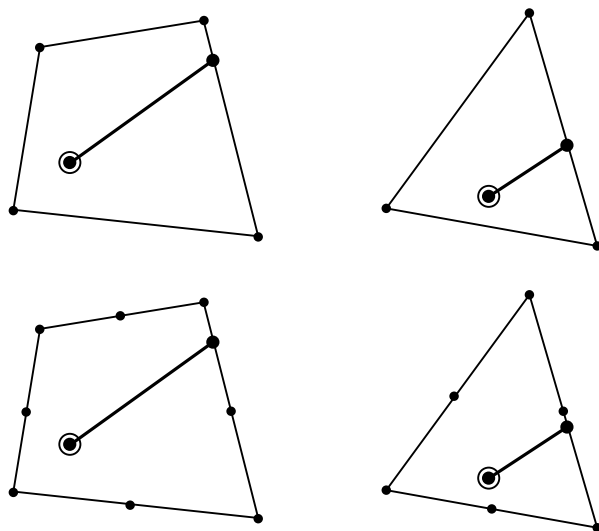


图 4.7.2 各种平面应变单元上的桩端支承单元

如图4.7.3所示，梁单元或桁架单元的轴向方向为桩端支承单元的  $x$  轴方向，与  $x$  轴和面外方向构成的平面相垂直的方向为  $y$  轴方向。

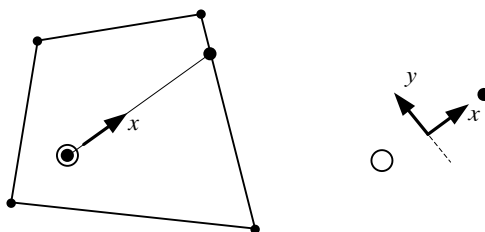


图 4.4.3 桩端支承单元的单元坐标系

### 4.7.3 单元特性

桩端支承单元的界面刚度既可以输入如下的常量，也可以输入随位移变化的函数(参照材料手册)。

$$\begin{aligned} k_x & : \text{单元坐标系 } x \text{ 方向刚度} \\ k_y & : \text{单元坐标系 } y \text{ 方向刚度} \end{aligned}$$

### 4.7.4 有限元公式

桩端支承单元与点界面单元(point interface element)的有限元公式类似，是岩土母体单元与桩端的点单元的接触界面单元，下面用二维母体单元说明桩端支承单元的有限元公式。

为了定义桩端支承单元的位移，需要先定义母体单元的位移  $\mathbf{u}_{mot}^i$  和点单元的位移  $\mathbf{u}_{pt}^i$ 。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{mot}^i &= \{u_{mot}^i, v_{mot}^i\} \\ \mathbf{u}_{pt}^i &= \{u_{pt}^i, v_{pt}^i\} \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

桩端支承单元的坐标轴转换矩阵与桩单元转换矩阵相同。

$$\mathbf{T}_{ip} = \mathbf{T}_{pile} \quad (4.7.2)$$

在母体单元的等参坐标系中桩端支承单元的节点坐标表示如下(参见下图)。

$$\mathbf{a}_{ip}^i = \{\xi_{iso}^i, \eta_{iso}^i\} \quad (4.7.3)$$

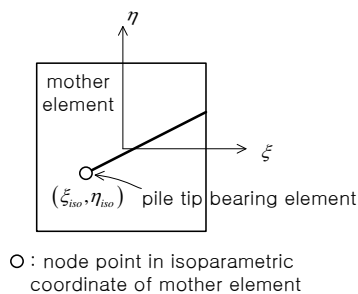


图 4.7.4 母体单元的等参坐标系上的桩端支承单元的坐标

桩端支承单元的形函数可用桩端支承单元位置上的母体单元的形函数与点单元的形函数表示如下。

$$\mathbf{N}_{tip}^i = \left[ -N_{mot}^i(\xi_{iso}^i, \eta_{iso}^i), N_{pt}^i(\xi_{pt}^i) \right] \quad (4.7.4)$$

因此在母体单元坐标系中，桩端支承单元的相对位移如下。

$$\Delta \mathbf{u}_{tip} = \mathbf{N}_{tip}^i \cdot \left\{ \mathbf{u}_{mot}^i, \mathbf{u}_{pt}^i \right\}^T \quad (4.7.5)$$

利用坐标系转换矩阵可得桩端支承单元坐标系上的相对位移。

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_{tip} = \mathbf{T}_{tip} \cdot \Delta \mathbf{u}_{tip} \quad (4.7.6)$$

桩端支承单元的刚度矩阵如下。

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{V_{tip}} \left( \mathbf{T}_{tip} \mathbf{N}_{tip}^i \right)^T \cdot \mathbf{D} \cdot \left( \mathbf{T}_{tip} \mathbf{N}_{tip}^j \right) dV_{tip} \quad (4.7.7)$$

其中， $\mathbf{D}$  为本构矩阵，可由用户输入的刚度获得。桩端支承单元为一维单元，而母体单元为二维单元，因此需要将本构矩阵用2X2形式的矩阵表示如下。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7.8)$$

界面力(traction)  $\mathbf{t}_{ip}$  与相对位移(relative displacement)  $\Delta\mathbf{u}_{ip}$  的关系如下。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}}_{ip} &= \mathbf{D} \cdot \Delta\hat{\mathbf{u}}_{ip} \\ \{t_x\} &= \mathbf{D} \{ \Delta u_x \} \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

### 4.7.5 单元结果

桩端支承单元输出的结果有界面力(traction)和相对位移。

- $t_x$  : 单元坐标系  $x$  方向界面力
- $t_y$  : 单元坐标系  $y$  方向界面力
- $\Delta u_x$  : 单元坐标系  $x$  方向相对位移
- $\Delta u_y$  : 单元坐标系  $y$  反向相对位移



## 4.8 土工格栅单元(geogrid element)

土工纤维作为高分子材料，以前用于砂、土、砾石环境中，防止砂土的冲刷并用于过滤，现在被广泛应用于土层的分离、加固、排水中，最近也被用于防裂、地下结构物的保护、防冲击中。

土工纤维是没有抗弯刚度和抗压刚度而只有抗拉刚度的单元，类似二维平面中的两节点的只能承受拉力的低阶桁架单元。

土工纤维的结构特性只需输入厚度即可，其宽度默认取单位宽度。

## 4.9 弹性连接单元(elastic link)

弹性连接单元是连接两个节点的单元，其刚度由用户直接输入，除了刚度外没有其他结构特性。弹性连接单元的坐标系参照图4.9.1，弹性连接单元的刚度可输入三个平动方向和三个旋转方向的刚度，当弹性连接单元赋予只受拉、只受压特性时只能输入单元坐标系  $x$  轴方向的刚度。

弹性连接单元可用于模拟桥梁支座、地基对基础的只受压支承作用等。另外可以将弹性连接指定为刚性，程序内部将使用较大的刚度连接两个节点，用于模拟两个节点的刚体效果。

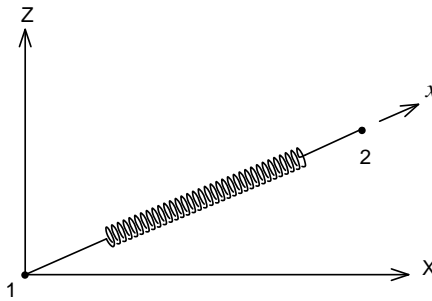


图 4.9.1 弹性连接单元的坐标系

## 4.10 刚性连接(Rigid link)

刚性连接单元用于约束两个节点间的相对位移，刚性连接由主节点和从属节点组成，从属节点的位移受主节点位移控制，其关系公式如下。

$$\begin{aligned}U_{Xs} &= U_{Xm} \\U_{Zs} &= U_{Zm} \\R_{Ys} &= R_{Ym}\end{aligned}\tag{4.10.1}$$

其中，

$U_{Xs}, U_{Zs}$  : 从属节点的整体坐标系X、Z轴方向的平动位移

$U_{Xm}, U_{Zm}$  : 主节点的整体坐标系X、Z轴方向的平动位移

$R_{Ys}$  : 从属节点的绕整体坐标系Y轴方向的旋转位移

$R_{Ym}$  : 主节点的绕整体坐标系Y轴方向的旋转位移

## 4.11 节点弹簧、节点阻尼

节点弹簧一般用于模拟模型边界上的约束。在二维问题中，节点弹簧拥有两个平动方向和一个旋转方向共三个自由度方向的刚度，节点弹簧的刚度由用户直接输入。地基的竖向支承刚度可用地基反力系数乘以有效面积计算而得。

节点阻尼一般用于模拟模型边界上的吸收能量的粘性边界效果。在二维问题中，可输入两个平动方向和一个旋转方向共三个方向的阻尼。节点阻尼仅用于动力分析中。

节点弹簧和节点阻尼的坐标系默认遵循整体坐标系，在定义了节点坐标系时遵循节点坐标系。

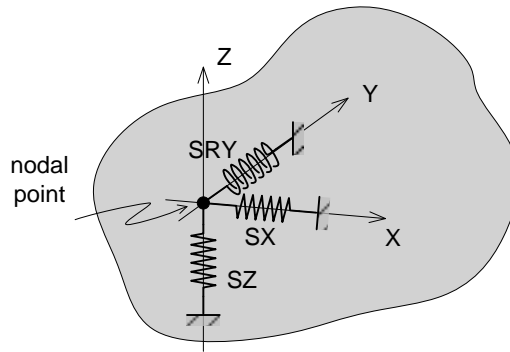


图 4.11.1 节点弹簧、节点阻尼的坐标系

## 第3部分

# 边坡稳定分析

### 边坡稳定分析

第1章 强度折减法

第2章 应力分析法

第3章 极限平衡法

附录



# 边坡稳定分析

- 边坡稳定分析 / 001
- 第1章 强度折减法 / 004
  - 1.1 概要 / 004
  - 1.2 理论背景 / 005
  - 1.3 最小安全系数的计算方法 / 008
- 第2章 应力分析法 / 007
  - 2.1 概要 / 007
  - 2.2 安全系数的计算方法 / 008
  - 2.3 对假想滑动面进行应力积分 / 009
- 第3章 极限平衡法 / 011
  - 3.1 概要 / 011
  - 3.2 分析方法 / 012
    - 3.2.1 瑞典条分法 / 012
    - 3.2.2 简化毕肖普法 / 013
    - 3.2.3 简化简布法 / 015
  - 3.3 定义边坡的破坏面 / 016
    - 3.3.1 圆弧破坏面 / 016
    - 3.3.2 自动搜索圆弧破坏面 / 022
    - 3.3.3 多折线形状破坏面 / 025
  - 3.4 条体分割 / 027

- 3.4.1 圆弧破坏面的条分法 / 027
  - 3.4.2 多折线形状破坏面的条分法 / 029
  - 3.5 荷载 / 030
    - 3.5.1 自重 / 030
    - 3.5.2 线荷载 / 031
    - 3.5.3 静力地震荷载 / 033
  - 3.6 定义岩土材料 / 034
    - 3.6.1 随深度变化的粘聚力 / 034
    - 3.6.2 非线性选项 / 034
    - 3.6.3 各向异性条件 / 035
  - 3.7 加固方法 / 036
    - 3.7.1 锚 / 036
    - 3.7.2 土钉 / 037
    - 3.7.3 板带 / 045
    - 3.7.4 支撑 / 046
  - 3.8 利用渗流分析结果计算孔隙水压 / 047
    - 3.8.1 确定破坏面上的孔隙水压和水位 / 047
- A 定义扩散宽度和扩散角度 / 049
- B 支护加固力的分配率 / 050

○ 附录 / 049





# 边坡稳定分析

填筑边坡、开挖边坡的稳定分析是岩土分析中常见的分析内容。边坡的自重、孔隙水压、附加荷载、地震作用、波动水压力荷载对边坡的稳定影响很大。当自重和外力作用下的边坡内部的剪切应力大于边坡岩土所具有的剪切强度时，边坡将发生破坏。通过剪切应力和剪切强度的分析来计算边坡的稳定性的分析叫做边坡稳定分析。

以往的边坡稳定分析没有考虑变形的过程(Duncan, 1984; Huang, 1983; Brunsten 等, 1984)。但是边坡的破坏一般都是变形逐渐增大后在局部区域发生较大位移时发生的，所以变形和破坏是不可分离的，是变形逐渐发展的过程(Chowdhury, 1978; Griffiths, 1993)。所以边坡稳定分析需要分析从初始的变形到破坏的整个过程。

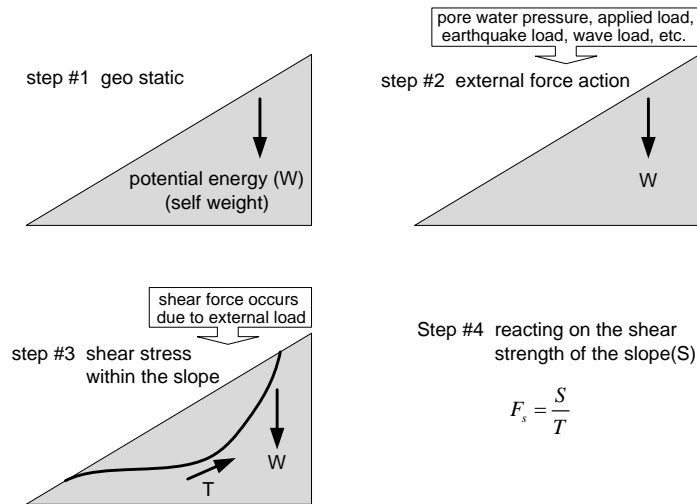


图 1 边坡稳定破坏示意图

一般推荐使用下列边坡稳定分析方法。

- 基于极限平衡理论的质量法(mass procedure)和条分法(slice method)
- 基于强度理论的极限分析法(limit theory)
- 基于弹性理论的有限元法(finite element method)

对边坡进行安全管理不仅要清楚边坡的最小安全系数，而且需要对边坡的破坏形态进行分析，这样才能在适当的位置设置监测点从而获取有价值的监测信息。有限元法可以提供所需数据，而且可以分析边坡的破坏过程(Anderson等，1987; Duncan, 1996)。

随着计算机水平不断进步，之前利用有限元方法通过计算岩土变形、应力、孔隙水压来进行结构的变形分析，但是现在更多的研究不仅满足于岩土变形分析，而是逐渐关注边坡的破坏引起的稳定性评价。

因此，SoilWorks不仅提供基本的极限平衡法(LEM, Limit Equilibrium Method)，还提供基于有限元方法的强度折减法(SRM, Strength Reduction Method)及基于极限平衡法的应力分析法(SAM, Stress Analysis Method)。

边坡稳定分析中使用的单位、边界条件、特性及荷载参考下表2，在隧道分析中有详细的说明供参考。

表1 极限平衡法和有限元方法的比较

边坡分析	极限平衡法	有限元方法
分析原理	- 条分法 - 利用力及弯矩的平衡	- 有限元建模 - 结构矩阵
分析结果	- 安全系数、临界面	- 变形形状，应力分布
优点	- 理论简单 - 较多的成功施工案例	- 多样化的岩土特性分析 - 位移，应力结果
缺点	- 无法查看破坏时的变形形状及应力分布 - 需要假定	- 分析求解难 - 稳定性评价资料不足
输入材料	- 粘聚力、内摩擦角	- 本构模型所需的值 (SoilWorks里的本构模型是莫尔库伦)

表2 边坡稳定分析时使用的单元、荷载及边界

区分	内容	SRM	SAM	LEM
岩土特性	平面应变	O	O	X
	几何	X	X	O
结构单元	梁	O	O	
	桁架 / 植入式桁架	O	O	X
	桩和加固构件	O	O	X
	接触	O	O	X
	弹簧	O	O	X
	弹性连接	O	O	X
	刚性连接	O	O	X
	土工格栅	O	O	X
	加固构件(LEM)	X	X	O
自重	自重	O	O	O
	荷载(隧道模块)	O	O	X
	线荷载(LEM)	X	X	O
	静力地震荷载(LEM)	X	X	O
边界	边界(隧道模块)	O	O	X
	圆弧破坏面	X	X	O
	多边形破坏面	X	X	O
	自动搜索面	X	X	O
本构模型	弹性材料	△	O	X
	莫尔-库伦	O	O	X
	莫尔-库伦(LEM)	X	X	O
结构特性	弹性材料	O	O	X

上表中O为可用，X为不可用，△为虽可用但是有限制条件。在强度折减法中若使用弹性土默认取用户定义的最大安全系数，所以计算结果没有意义。



# 强度折减法

## 1.1 概要

有限元法是利用边界上的力的平衡条件和协调条件、本构方程、边界条件等对结构进行分析的方法。该方法可以较为真实地模拟现场条件，不必事先假定破坏面，可以通过分析自动得到较为真实的破坏状态(Griffith等 1999; Matsui, 1990)。

使用有限元法做边坡稳定分析的方法大致分为两类，一类是使用强度折减法直接计算，一类是将计算的应力值与极限平衡法结合决定安全系数(Pasternack, S.C. and Gao, S, 1988) (Naylor, 1999)。强度折减法是通过逐渐减小剪切强度直到计算不再收敛为止，将没有收敛的阶段视为破坏，并将该阶段的最大的强度折减率作为边坡的最小安全系数。该方法需要进行多次迭代非线性分析，分析费用较高，可通过提高电算速度减少计算时间并获得比较准确的结果。

强度折减法的优点如下：

- (1). 无须提前假定破坏面。土的剪切强度小于土在自重作用下的剪切强度时就会发生破坏。在下一章节将会有详细的介绍。
- (2). 有限元法无须条分的概念，因此也没有条间力的概念，直到破坏前都满足平衡状态。
- (3). 如果土的特性准确，那么利用边坡应力及变形的信息就可以获取强度折减系数。
- (4). 强度折减法不但可以了解破坏的变形过程还可以获取破坏后的信息。

## 1.2 理论背景

最初使用基于有限元法的强度折减法的论文是辛克维奇(Zienkiewicz)在1975发表的论文。如图1.2.1所示，在计算边坡的安全系数时，首先关注边坡上任意单元的高斯点A，并将该点的应力状态用莫尔圆表现。为了模拟边坡的破坏状态，需要在假定的破坏面上的应力状态的莫尔圆接近破坏包络线。所以首先假定任意的安全系数F除以该点的剪切强度，使其接近莫尔圆，即将该点的应力状态修正为破坏状态。随着破坏点的增多边坡将发生整体破坏，此时有限元分析将发散，而此时的F值就是最小安全系数。该方法需要稳定性较强的计算方法，否则无法得到准确的结果。

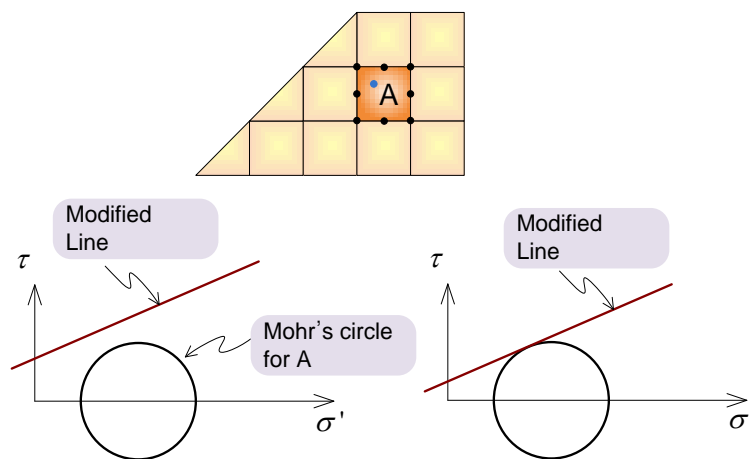


图 1.2.1 强度折减法

## 1.3 最小安全系数的计算方法

强度折减法在计算最小安全系数时，认为边坡的弹性模量E和泊松比 $\nu$ 不变，将粘聚力 $c$ 和内摩擦角 $\phi$ 按下面方式逐渐减小，直到计算发散为止，将发散时的 $F_s$ 作为最小安全系数。针对剪切破坏的边坡破坏的安全系数公式如下。

$$F_s = \frac{\tau}{\tau_f} \quad (1.3.1)$$

在此， $\tau$  是边坡的剪切强度，该值可通过莫尔-库仑基准按如下公式计算。

$$\tau = c + \sigma_n \tan \phi \quad (1.3.2)$$

$\tau_f$  是滑动面上的剪切应力，可按如下所示公式计算

$$\tau_f = c_f + \sigma_n \tan \phi_f \quad (1.3.3)$$

其中， $c_f = \frac{c}{\text{SRF}}$  : 剪切强度因子  
 $\phi_f = \tan^{-1}\left(\frac{\tan \phi}{\text{SRF}}\right)$  : 剪切强度因子  
SRF : 强度折减系数

强度折减法是将收敛前的SRF值作为安全系数，因为根据用户所输入的收敛次数及不平衡力等因素安全系数会有很大的差异。现在SoilWorks中提供的最基本的最大收敛次数是50次，不平衡力为0.03。另外为了确定最小安全系数若不将 $F_s$ 值按照非常小的值进行迭代增加，不但无法计算准确的最小安全系数，而且所需时间较长。

另外，为了获取与现场一致的变形形状及安全系数需要确定膨胀角。膨胀角 $\psi$ 与摩擦角 $\phi$ 相同时属于关联塑性条件，此时刚度矩阵对称，所以虽然分析速度和收敛都比较理想，但是岩土有过度膨胀的倾向。膨胀角为0时属于非关联塑性条件，由于体积不发生变化所以更能提高安全系数的可信度。



# 应力分析法

## 2.1 概要

边坡稳定分析中主要有条分法及有限元法，极限平衡法属于条分法中的一种，是实际设计中最常用的边坡稳定分析方法之一。极限平衡法无法考虑滑坡过程的应力变化及土应力随着地下水发生的变化过程，数值模拟的有限元法虽然可以模拟滑坡过程或其他的土特性，但是所需的分析时间较长，且缺少评价边坡稳定性的资料。近来在广泛研究既具有条分法的简便性，又具有数值模拟的优点的稳定分析方法，下面介绍由KAIST开发的金竹勇(1998)的基于有限元法的边坡稳定分析方法。

此方法主要是利用有限元法对边坡进行应力计算，利用应力分析结果计算极限平衡法的各假想滑动面上的安全系数，从中寻找最小的安全系数及对应的临界面。有限元分析中使用的岩土的本构模型采用与极限平衡破坏准则一致的莫尔-库仑屈服准则。

## 2.2 安全系数计算方法

有限元法使用的安全系数计算方法如下。

$$F_s = \frac{\int_S \tau_f d\Gamma}{\int_S \tau_m d\Gamma} \quad (2.2.1)$$

$\tau_m$  是计算剪切应力， $\tau_f$  是莫尔-库仑破坏抗剪强度，计算公式如下。

$$\begin{aligned} \tau_f &= c + \sigma_n \tan \phi \\ \tau_m &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

在此，滑动面的垂直应力  $\sigma_n$  计算公式如下。

$$\sigma_n = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2.2.3)$$

此时  $c$  为粘聚力、 $\phi$  为材料的内摩擦角， $\theta$  为水平面与活动面的交角。另外  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的法向应力， $\tau_{xy}$  为剪切应力。

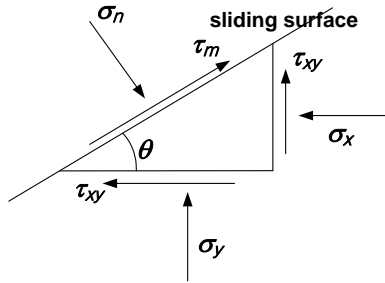


图 2.2.1 边坡上的各应力

如公式(2.2.1)所示，为了计算安全系数需要对假想活动面进行应力积分，这样的应力积分比起使用高斯积分点的值，使用节点上的连续应力场的数值其结果更具有可信度，所以SoilWorks



中使用了整体应力平滑方法(global stress smoothing method, Hinton & Compbell, 1974)计算各节点上的连续应力场。

## 2.3 对假想滑动面进行应力积分

为了计算假想滑动面上的安全系数，需要按式(2.2.1)所示沿假想滑动面对剪切应力进行积分计算。因此需要决定滑动面经过的单元路径，然后对滑动面经过的所有的单位进行积分计算。

单元内任意点的剪切应力可以使用由剪切应力平滑法得到的节点应力来计算，公式如下。

$$\sigma = \sum_{i=1}^{node} N_i \sigma_i^{node} \quad (2.3.1)$$

其中， $N_i$ 为在节点 $i$ 上的形函数， $\sigma_i^{node}$ 为节点 $i$ 的节点应力， $\sigma$ 为单元内任意点的应力。

二维整体坐标系上的假想滑动面的应力积分可以转换为一维局部坐标系的积分形式，转换方法如下。

$$\int_{n1}^{n2} \tau(x, y) d\Gamma = \frac{L}{2} \mathbf{T} \int_{-1}^1 \tau(\xi) d\xi = \frac{L}{2} \mathbf{T} \sum_{i=1}^{nint} W_i \tau(\xi_i) \quad (2.3.2)$$

其中，

$\xi$	: 局部坐标系的坐标参数
$W_i$	: 积分点 $i$ 上的积分常量
$\mathbf{T}$	: 将单元坐标系应力转换为整体坐标系应力的转换矩阵
$L$	: 单元长度
$\tau$	: 假想滑动面上的剪切应力 $\tau_m$ 或抗剪强度 $\tau_f$

假想滑动面的最终的安全系数如下。

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^{nel} \int_{n_1}^{n_2} \tau_f d\Gamma}{\sum_{i=1}^{nel} \int_{n_1}^{n_2} \tau_m d\Gamma} \quad (2.3.3)$$

其中，

- nel : 假想滑动面经过的单元数
- n<sub>1</sub> : 单元内假想滑动面的起点
- n<sub>2</sub> : 单元内假想滑动面的终点

应力分析法是将有限元法得到的应力场和极限平衡法中使用的破坏面相结合的分析方法。因此既可以得到应力分布和变形结果，又可以得到临界破坏截面。应力分析法与强度折减法相比大大地减少了分析的所需时间，而且无需对各种土和加固构件进行假设也可以得到所需的结果。



# 极限平衡法

### 3.1 概要

极限平衡法是将边坡视为一个土体，在任意破坏面上满足力的平衡条件的分析方法。极限平衡法假设在直线、圆弧构成的曲面或不规则的面上遵循莫尔-库仑破坏准则，计算滑动面上发生破坏时的土体的稳定性。为了简化问题极限平衡法设立了一些假定，使其通过简单的静力学计算获得所需的结果。极限平衡法广泛应用于边坡稳定分析中，长期以来的经验证明了其实用性和可信度。使用极限平衡法的边坡稳定分析方法有很多种，其准确性取决于土体的强度参数和边坡的几何条件的准确度以及分析方法的精确度。

极限平衡法分析有  $\phi = 0$  分析法、瑞典条分法(Fellenius)、毕肖普法(Bishop)、修正毕肖普法、简布法(Janbu)，斯宾塞法(Spencer)、摩根斯坦和普赖斯法(Morgenstern and Price)、一般极限平衡法(GLE)、土楔体分析法、对数螺旋线法等。

极限平衡法的边坡稳定分析中因为未知数的数量大于方程式的数量，所以需要适当的假定才能得到结果。

图3.1.1所示的条块有  $n$  个时方程式数量有  $3n$  个，即每个条块上满足竖向力、水平力和弯矩的平衡。未知数的数量在力的平衡方程中有  $3n-1$  个、在弯矩平衡方程中有  $2n-1$  个，总计有  $5n-2$  个，因此  $n$  个的条块有  $2n-2$  次非静定。

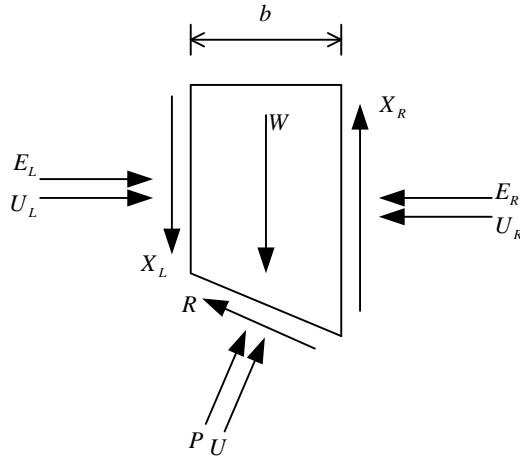


图 3.1.1 作用在条块上的力

## 3.2 分析方法

### 3.2.1 瑞典条分法(Fellenius)

费伦纽斯法(Fellenius)又称为普通条分法(OMS, ordinary method of slices)或瑞典条分法(swedish method), 该方法假定在滑动面中心弯矩处于平衡状态, 各分割条块间的作用力的合力也处于平衡状态。瑞典条分法使用抗剪能力评价边坡的抗滑坡能力, 抗剪能力等于抗剪强度乘以条块底面积, 公式如下。

$$R = \tau l \tag{3.2.1}$$

抗剪强度  $\tau$  使用库伦的破坏理论按下式计算。

$$\tau = c' + (\sigma - u) \tan \phi \tag{3.2.2}$$

其中,

$c'$  : 给予有效应力的粘聚力

$\sigma$  : 条块底面的全应力

- $u$  : 孔隙水压  
 $\phi'$  : 基于有效应力的内摩擦角

引起边坡滑动的剪力  $T$  按照下式计算。

$$T = W \cos \alpha \quad (3.2.3)$$

其中,

- $T$  : 引起条块底面滑动的力  
 $W$  : 条块的整体重量  
 $\alpha$  : 条块滑动面的斜率

瑞典条分法的安全系数可按照下式所算。

$$F_{Fellenius} = \frac{\Sigma [c' + (\sigma - u) \tan \phi'] l}{\Sigma W \cos \alpha + \Sigma M_{ext} / R} \quad (3.2.4)$$

### 3.2.2 简化毕肖普法(Simplified Bishop)

简化毕肖普法的分析方法比较简单, 其结果比较接近正确的解, 所以在条分法中使用频率最高。

毕肖普法假定条块间的作用力的合力方向为水平方向。由于该方法使用了假想旋转中心的概念, 所以也适用于非圆弧形滑动面, 其力的平衡方程如下。

$$X_R - X_L = 0 \quad (3.2.5)$$

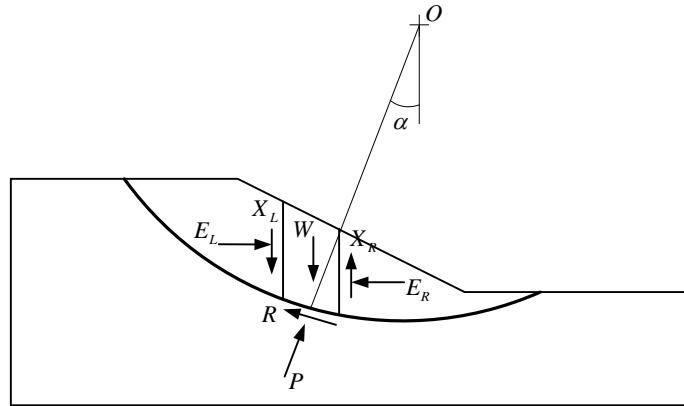


图 3.2.1 毕肖普法的条块上的力

条块滑动面上的平衡方程式如下。

$$R = \frac{1}{F} \{c'l + (P - ul) \tan \phi'\} \quad (3.2.6)$$

$$P \cos \alpha + R \sin \alpha = W - (X_R - X_L)$$

其中，由于假定了  $X_R - X_L = 0$ ，所以  $P$  可以按下式计算。

$$P = \left\{ W - \frac{1}{F} (c'l \sin \alpha - ul \tan \phi' \sin \alpha) \right\} \frac{1}{m_\alpha} \quad (3.2.7)$$

其中，  $m_\alpha = \cos \alpha \left( 1 + \frac{\tan \alpha \tan \phi'}{F} \right)$

如图3.2.1所示，由圆弧中心O上的弯矩平衡可得安全系数  $F$  如下。

$$F = \frac{\Sigma \{c'l + (p - ul) \tan \phi'\}}{\Sigma W \sin \alpha} \quad (3.2.8)$$

简化毕肖普法如上式所示由于左侧和右侧都有安全系数项，所以需要通过试算才能得到最终

的安全系数  $F$ 。

SoilWorks进行试算时使用假设的初始安全系数  $F$  进行试算可以预防收敛计算，并可以提高计算速度。

### 3.2.3 简化简布法(Simplified Janbu)

简化简布法与简化毕肖普法比较类似，只是简化毕肖普法以弯矩平衡作为基本假设，而简化简布法将水平力平衡作为基本假设。

$$X = 0 \quad (3.2.9)$$

因此对于由多个不同材料土层构成的边坡，可获得比较好的分析结果。

条分滑动面的平衡方程式与简化毕肖普法相同(参考公式3.2.6)。

所以， $P$  可按下式计算。

$$P = \left\{ W + (X_R - X_L) - \frac{1}{F} (c'l \sin \alpha - ul \tan \phi' \sin \alpha) \right\} \frac{1}{m_\alpha} \quad (3.2.10)$$

$$\text{其中, } m_\alpha = \cos \alpha \left( 1 + \frac{\tan \alpha \tan \phi'}{F} \right)$$

考虑到水平力平衡假设( $X = 0$ )可按下式计算安全系数  $F$ 。

$$F = \frac{\sum \{ c'l + (p - ul) \tan \phi' \} \cos \alpha}{\sum p \sin \alpha} \quad (3.2.11)$$

简化简布法与简化毕肖普法一样需要通过反复试算才能得到最终的安全系数  $F$ 。

一般来说，瑞典条分法、简化简布法、简化毕肖普法得到的安全系数大小顺序如下。

$$F_{Fellenius} < F_{Janbu} < F_{Bishop} \quad (3.2.12)$$

### 3.3 定义边坡的破坏面

极限平衡法中的破坏面从形状上分为圆弧形破坏面和多折线形破坏面。对于圆弧形破坏面需要定义破坏面的“圆弧中心点区域”，通过圆弧中心点区域中的中心点以及其他附加参数可得到圆弧破坏面。SoilWorks中提供了多种附加参数设置方法，用户可以非常方便的定义圆弧破坏面。

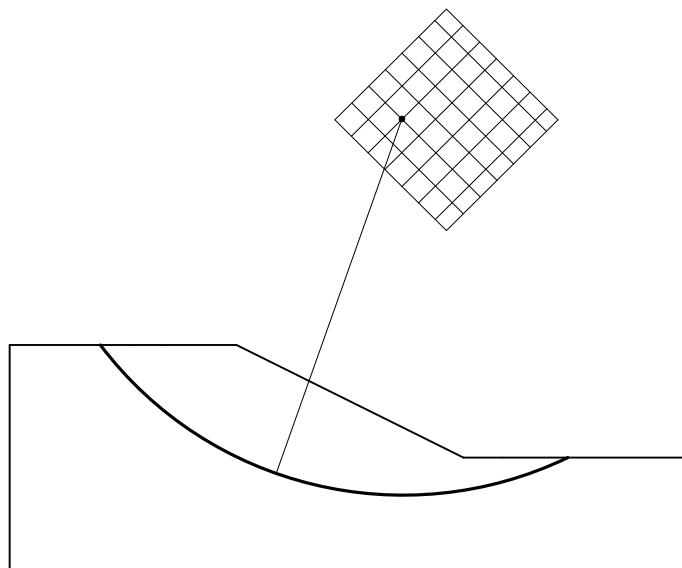
另外定义“圆弧中心点区域”需要有较为丰富的分析经验，对于初级水准的设计人员来说这是经常遇到的难题。SoilWorks中提供了自动定义圆弧破坏面的功能，解决了上述难题。

对于多段线形破坏面，程序不仅支持表格输入方式，也可以通过鼠标点击快速的定义。

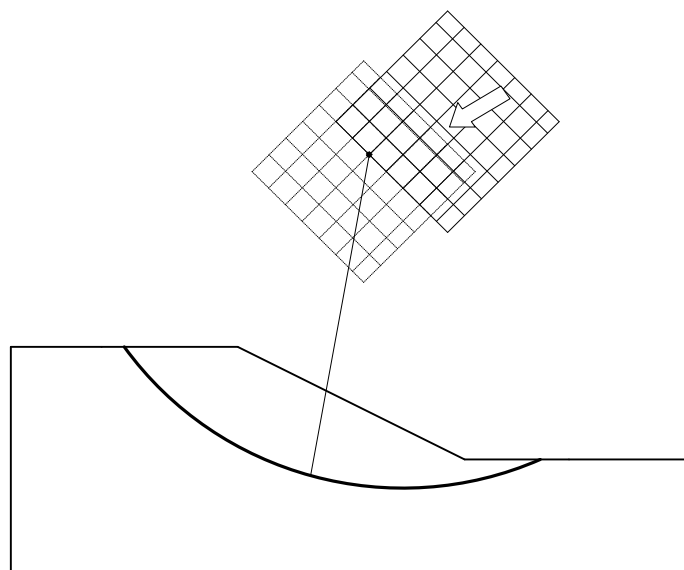
#### 3.3.1 圆弧破坏面

在定义圆弧破坏面之前需要先定义圆弧的中心点区域。如图3.3.1(a)所示，预计发生最小安全系数的圆弧破坏面的圆弧中心应在圆弧中心点区域内。如图3.3.1(b)所示，当计算得到的最小安全系数的圆弧破坏面的圆弧中心点在圆弧中心点区域的最外端时，应调整圆弧中心点区域使发生最小安全系数的圆弧破坏面的圆弧中心点在区域内，然后再重新进行分析。另外如图3.3.1(c)所示，在SoilWorks中可以定义多个分析工况，使用不同的圆弧中心点区域同时分析，这样可以快速得到最小安全系数。

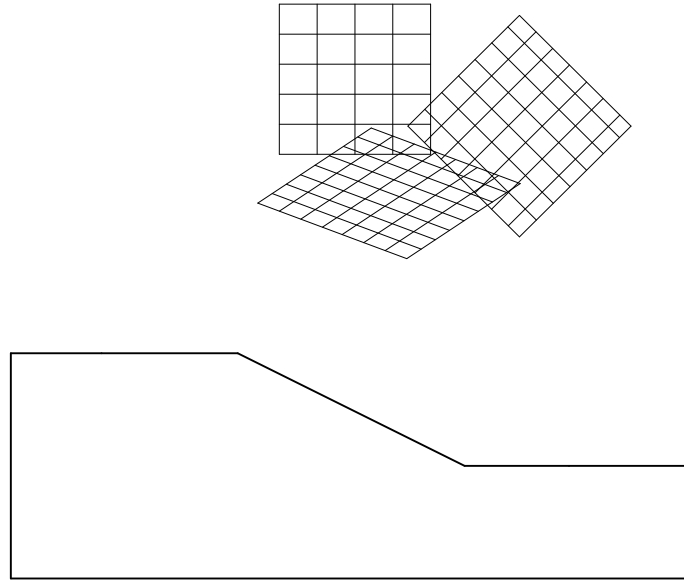




(a) 设定中心点



(b) 最小安全系数位于最外端时移动圆弧中心点区域重新分析



(c) 设定多个圆弧中心点

图 3.3.1 设定圆弧的中心点

利用圆弧中心点区域中的点绘制圆弧破坏面的方法时有圆弧切线法、圆弧半径和长度法，对两种方法的介绍如下。

### 3.3.1.1 圆弧切线法

如下图3.3.2所示，圆弧切线法就是通过定义与圆弧相切的直线，使用圆弧中心点+圆弧切线绘制圆弧的方法。

圆弧中心点区域可以使用鼠标在屏幕上点击设置，利用“圆弧半径增量数量”、“圆弧半径增量”及“转换切线方向”功能来定义一个圆弧中心点对应的圆弧的数量和相应半径。

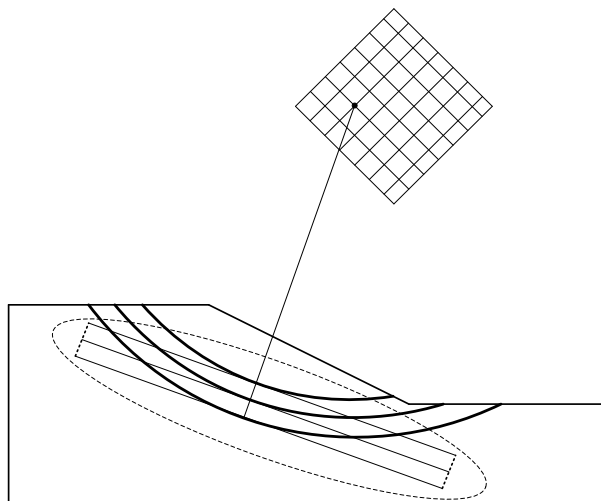


图 3.3.2 利用圆弧切线法定义的圆弧

### 3.3.1.2 圆弧半径和长度法

圆弧半径和长度法中有“搜索最小圆弧半径”功能和“定义初始圆弧通过点”功能。另外，还可以利用“限制圆弧通过的地层层组”功能限制圆弧的范围，各功能说明如下。

#### a. 搜索最小圆弧半径

选择搜索最小圆弧半径功能时，程序将从边坡上的点和直线中搜索出距离圆弧中心点最近的点和最近的直线，并在圆弧中心点到最近点的距离和圆弧中心点到最近直线的距离中取较小值为最小圆弧半径  $r_{\min}$ 。然后利用最小圆弧半径、圆弧半径增量  $\Delta r$ 、圆弧半径增量数量  $n$ ，得到一个圆弧中心点对应的  $n$  个假想圆弧破坏面的半径。

$$r_i = r_{\min} + \Delta r \times i \quad (i=1 \cdots n) \quad (3.3.1)$$

其中，

$r_i$  : 第  $i$  个假想圆弧的半径

$r_{\min}$  : 搜索的最小半径

- $\Delta r$  : 输入的圆弧半径增量
- $n$  : 输入的圆弧半径增量数量

b. 定义初始圆弧通过点

如图3.3.3所示，通过定义圆弧通过点位置，将圆弧中心点到通过点的距离作为初始圆弧半径  $r_0$ 。然后利用定义的圆弧半径增量  $\Delta r$  和半径增量数量，得到一个圆弧中心点对应的  $n$  个假想圆弧破坏面的半径。

$$r_i = r_0 + \Delta r \times (i-1) \quad (i=1 \cdots n) \tag{3.3.2}$$

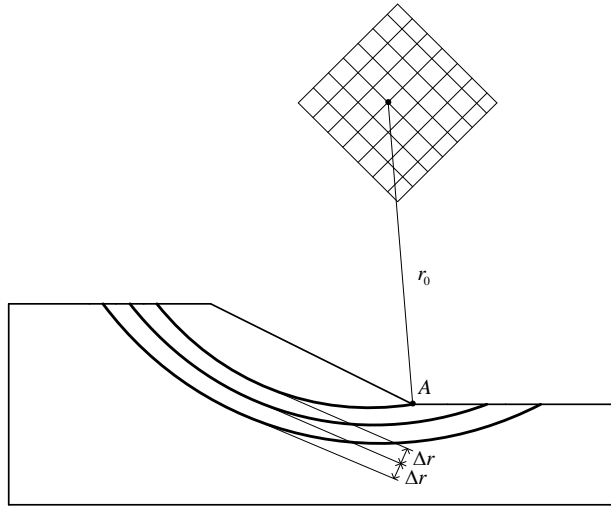


图 3.3.3 根据定义通过点计算半径

c. 限制圆弧通过的地层层组

因为有些土层通过经验判断不会发生破坏，因此在多个假想破坏面圆弧中需要排除一些不可能发生的假想破坏面，这个需求可通过定义“限制圆弧通过的地层层组”实现。如下图3.3.4所示，当设置了限制通过层为layer A时，在已经定义的三个假想破坏面中将忽略通过了该层的第三个假想破坏面圆弧，然后重新搜索从圆弧中心点到layer A的最短距离点C点，并将该

距离作为最短圆弧半径重新绘制第三个假想破坏面。

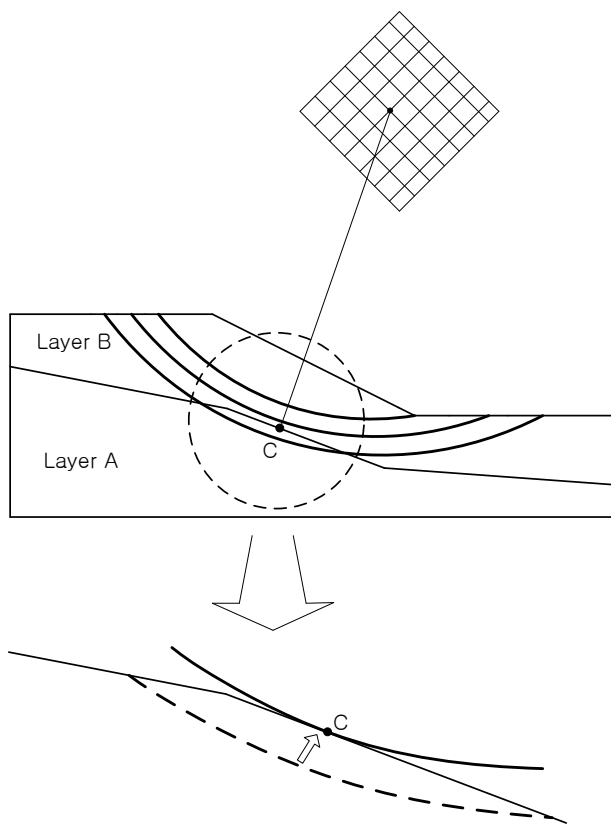


图 3.3.4 定义限制圆弧通过层组及重新搜索新的圆弧破坏面示意图

### 3.3.2 自动搜索圆弧破坏面

如何定义圆弧中心点区域直接影响分析结果和分析时间，并且定义圆弧中心点区域需要相当丰富的分析经验。SoilWorks中为了解决这个难题提供了自动搜索圆弧破坏面的功能，用户只需要定义圆弧中心点区域栅格数量、圆弧半径增量、初始圆弧通过点、圆弧通过限制点等信息。

如图3.3.5和图3.3.6所示，程序内自动搜索圆弧破坏面的计算过程分为两个阶段。

第一阶段为粗略计算阶段，方法如下。

- (1) 使用圆弧中心点区域栅格数量、初始圆弧通过点等信息水平分割模型(参见图3.3.5)，获得分割线与边坡的交点。
- (2) 连接初始圆弧通过点和交点，绘制连线的垂直平分线。
- (3) 在各垂直平分线(A线)上，使用圆弧中心点区域栅格数量信息按图3.3.5方式分割垂直平分线，获得一系列圆弧中心点。  
圆弧中心点数量 = 栅格数量 X 圆弧半径增量数量
- (4) 使用前面所述的“圆弧半径和长度法”，利用初始圆弧通过点、圆弧通过限制点等信息确定各中心点对应的圆弧破坏面。
- (5) 计算出边坡的最小安全系数，并确定该最小安全系数所对应的圆弧中心点位置。

第二阶段为精细计算阶段，方法如下。

- (1) 首先确定第一阶段获得的最小安全系数对应的圆弧中心点(点A)所在的垂直平分线 $B_1$ 及两边另外两条相邻的垂直平分线 $B_2$ 、 $B_3$ 。
- (2) 然后分别确定 $B_2$ 、 $B_3$ 线上离最小安全系数对应的圆弧中心点(点A)最近的四个点(每条线上各两个点)，分别为如图3.3.6所示的A1、A2、A3、A4。
- (3) 使用输入的圆弧中心点区域栅格数量重新分割间隔数量重新分割A1、A2、A3、A4围成的区域，生成新的圆弧中心点区域。
- (4) 使用前面所述的“圆弧半径和长度法”，利用初始圆弧通过点、圆弧通过限制点等信息重新确定新的圆弧中心点对应的圆弧破坏面。
- (5) 计算出最终的边坡最小安全系数。

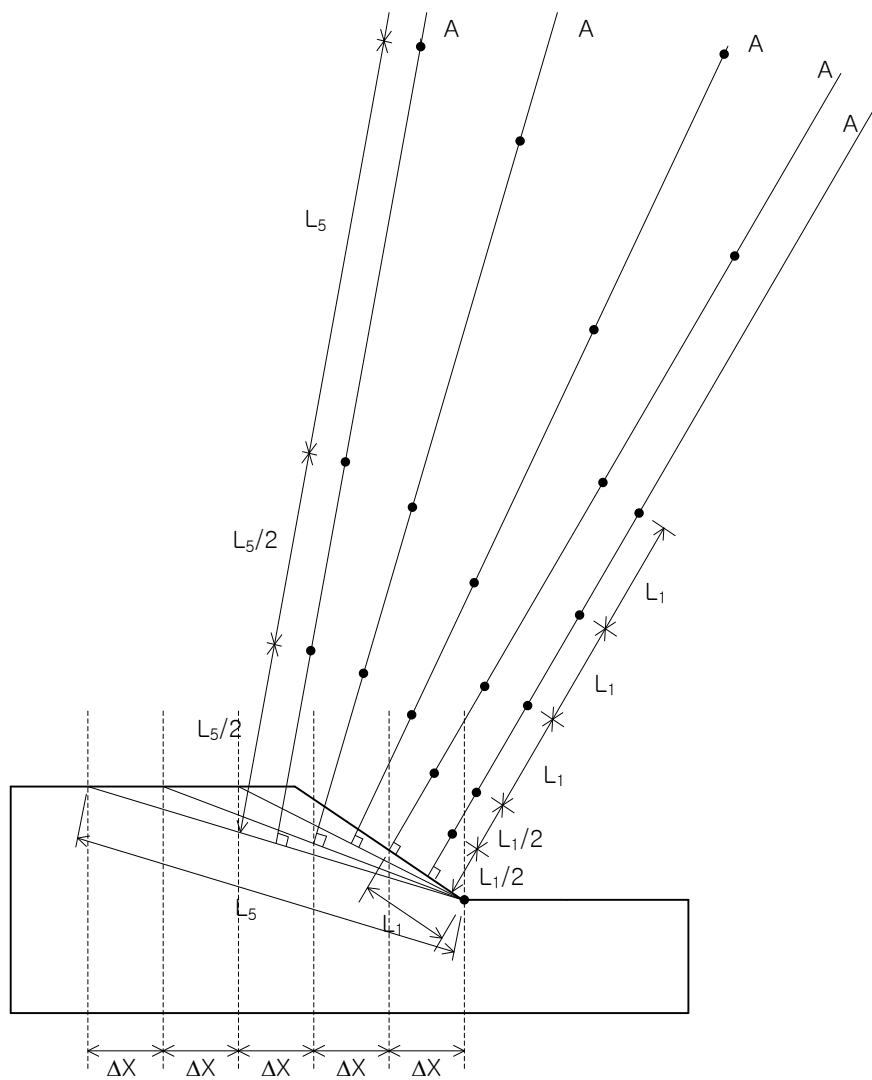


图 3.3.5 自动定义第 1 阶段分析所需的圆弧中心点

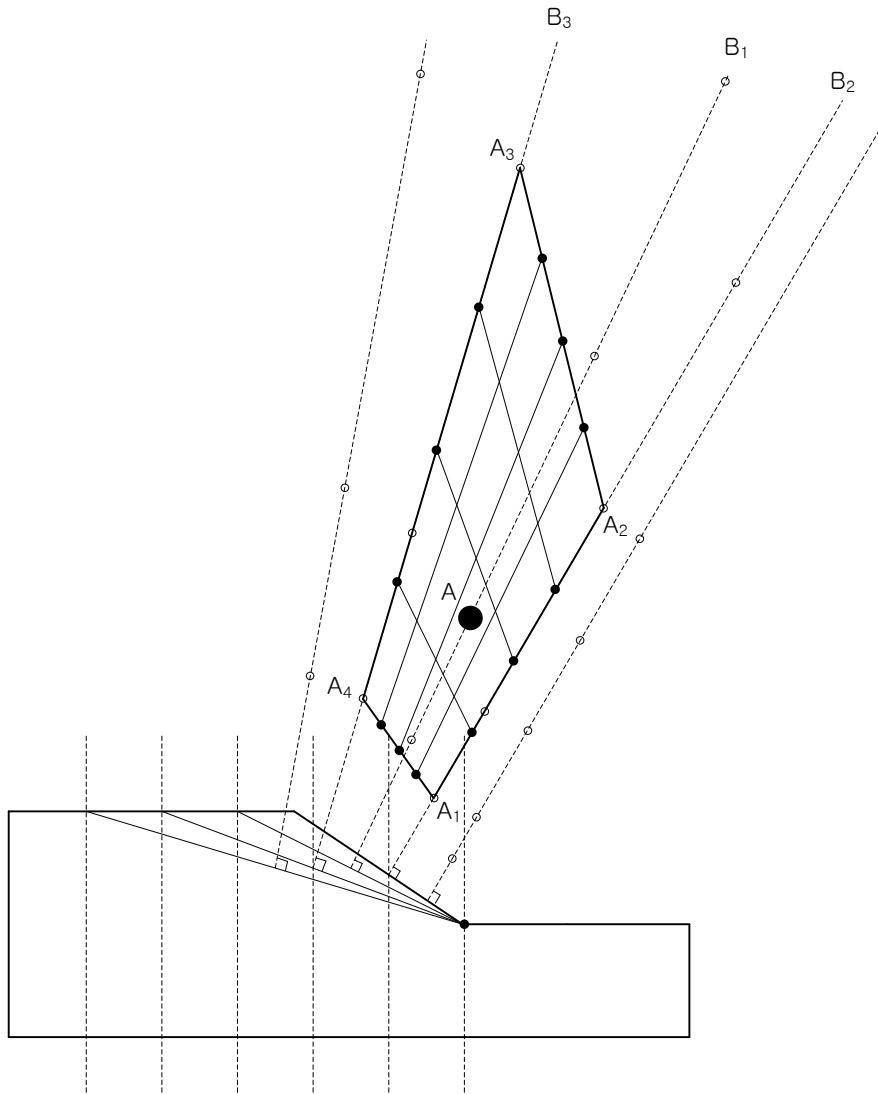


图 3.3.6 第 2 阶段分析所用的圆弧中心点

### 3.3.3 多折线形状破坏面



如图3.3.7所示，与圆弧破坏面不同，多折线形状破坏面不需要定义圆弧中心点区域，只要用多个线段定义破坏面即可。

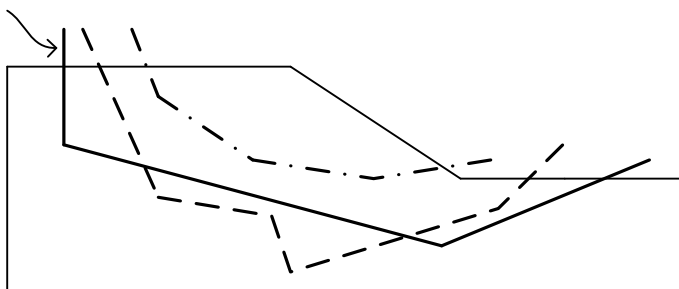
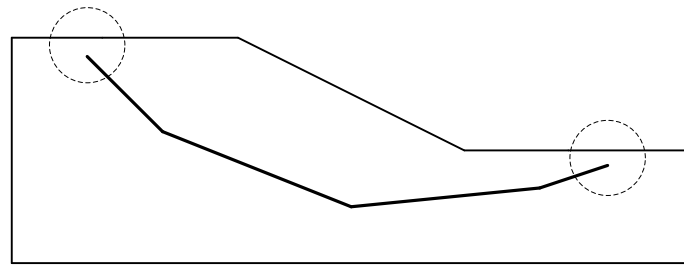
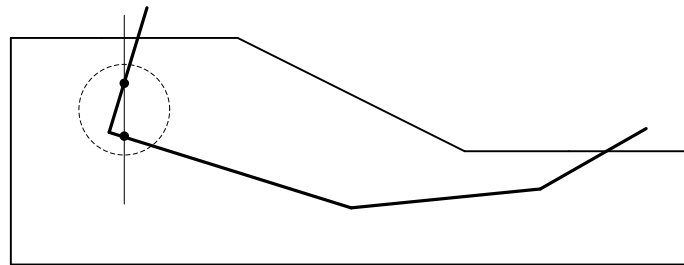


图 3.3.7 多折线形状的破坏面

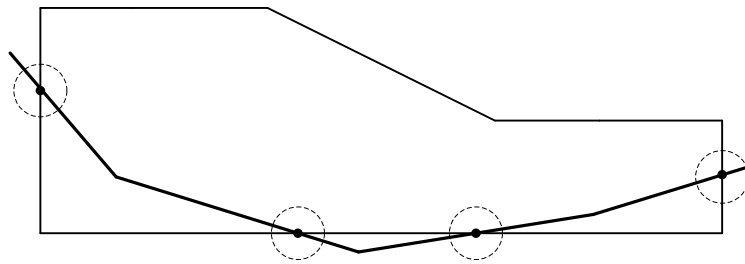
手动定义多折线破坏面时，要避免出现如图3.3.8所示的几种情况。



(a) 端点与上部轮廓线不相交



(b) 与任意竖线出现连个交点



(c) 与两侧边和底边相交

图 3.3.8 定义多折线形状破坏面时需要避免的情况

SoilWorks中每个分析工况只能使用一个多折线形状破坏面。需要定义多个破坏面时可以定义多个分析工况。

## 3.4 条体分割

极限平衡法属于条分法，所以无论是圆弧破坏面还是多折线形破坏面都必须进行条分。

条分方法主要有两种，一种是固定条分宽度的方法，一种是固定条分破坏面长度的方法，两种方法对常规模型其分析结果差异不大。但是当条分的破坏面斜率较大时、或者有加固构件时两种方法结果又一定差异，其中固定破坏面长度的方法不仅方便，而且有加固构件时其分析结果也更加合理，所以SoilWorks中使用了第二种分割方法。

### 3.4.1 圆弧形破坏面的条分法

程序中以等圆弧长度分割圆弧破坏面。当圆弧的总长度为  $L$ ，分割数量为  $n$  时，如图3.4.1所示“条形滑动面”A的圆弧长度为  $L/n$ 。

如图3.4.2所示，如果圆弧破坏面的形状有误时(虚线部分)，程序会忽略向内弯曲的虚线部分，将其调整为垂直。垂直向上的部分称为“垂直破坏面”，各分析方法中垂直破坏面上的应力定义不同。

$$\begin{array}{ll} \text{瑞典条分法} & : \sigma' = 0 \\ \text{毕肖普法} & : \sigma' = \sigma_{\min} \end{array}$$

其中，

$$\begin{array}{ll} \phi \neq 0 \text{ 时} & : \sigma'_{\min} = -\frac{c}{\tan \phi}, \quad \tau_{\max} = 0 \\ \phi = 0 \text{ 时} & : \sigma'_{\min} = -\infty, \quad \tau_{\max} = c \end{array}$$

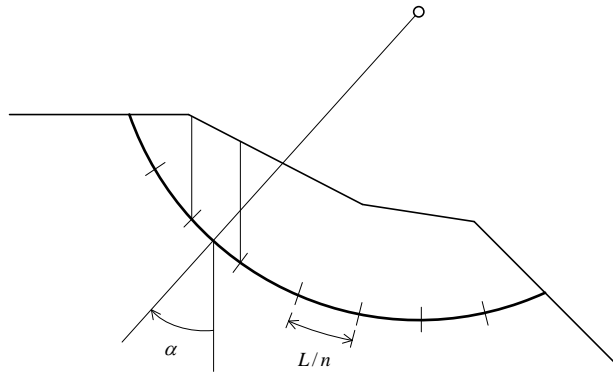


图 3.4.1 圆弧形破坏面的条分方法

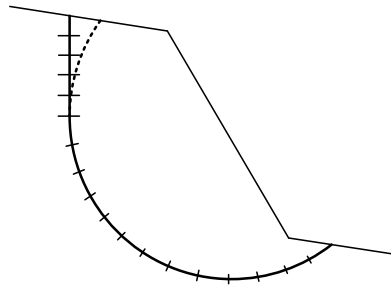


图 3.4.2 破坏面有误时调整为垂直破坏面

将分割的各条形滑动面用直线连接成滑动面，图3.4.3所示圆弧与直线的误差较小可忽略不计。

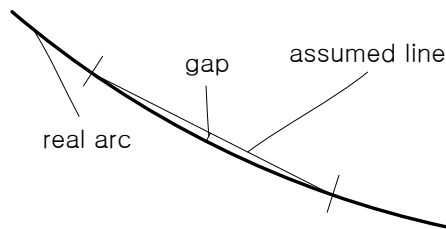


图 3.4.3 圆弧形滑动面与直线的误差

### 3.4.2 多折线形状滑动面的条分法

如图3.4.4所示，对于多折线形滑动面，各个折线段使用不同的分割数量进行分割。各折线段的分割数量计算公式如下，分割方法参见下图。

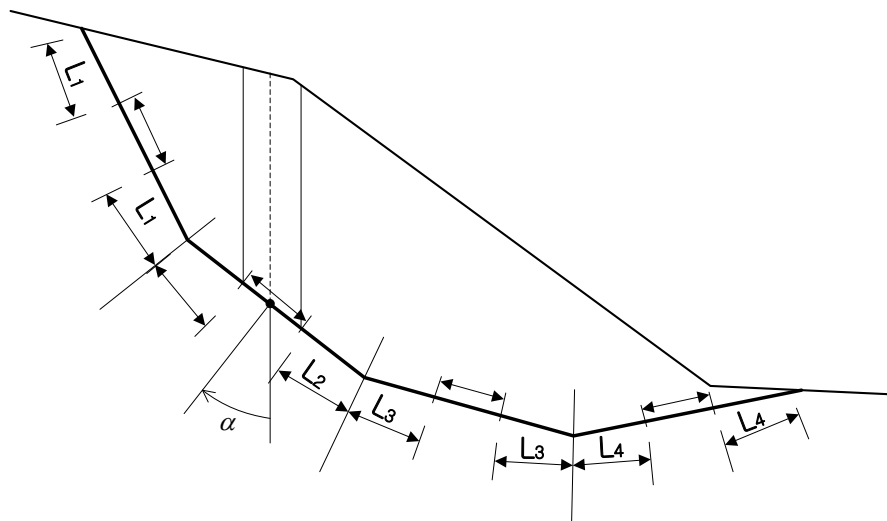


图 3.4.4 多折线形破坏面的分割

$$n_i = \frac{l_i}{\sum l_i} N \quad (3.4.1)$$

$$\Delta l_i = \frac{l_i}{n_i}$$

其中，

- $n_i$  :  $i$  折线段的分割数量
- $l_i$  :  $i$  折线段的长度
- $N$  : 全部分割数量(在分析控制中由用户输入)
- $\Delta l_i$  :  $i$  折线段的分割长度

## 3.5 荷载

### 3.5.1 自重

如图3.5.1所示，在建立模型时程序会自动生成“自重”荷载组，自重系数沿整体坐标系Z轴方向自动设置为-1.0。在Z方向上输入系数-1.0表示在材料的容重上乘以1.0的系数，符号(-)表示重力作用方向为整体坐标系Z轴的反向。

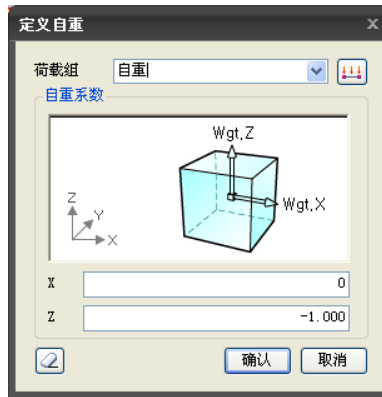


图 3.5.1 自重输入窗口

如图3.5.1所示，自重的输入窗口中还可以输入X方向的自重系数，在边坡稳定分析中，即便输入了X方向的自重系数也不会反应在分析中(该方向系数仅用于其他模块中)。

如图3.5.2所示，当定义了地下水位时，土条中水位上面的土(A部分)使用常规土容重，水位下面的土(B部分)则考虑了饱和容重于计算全应力。

如图3.5.2所示，在水中的边坡表面(标记为C的部分)会受到水的水平压力的影响，因此程序中会自动考虑水平水压力荷载计算安全系数。另外，对于水中的边坡表面(斜面和水平面)程序还会自动考虑水的竖向压力的影响。

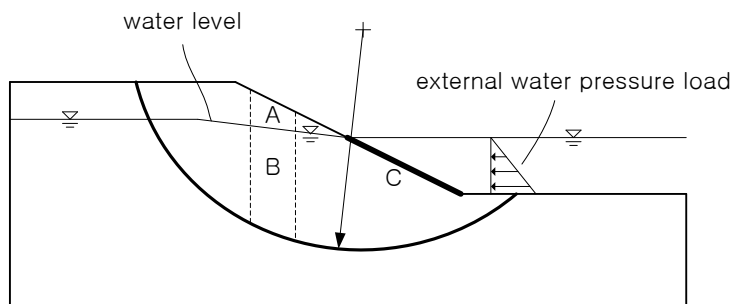


图 3.5.2 考虑自重和水压

### 3.5.2 线荷载

程序中极限平衡法中的线荷载是指一般的静力荷载。根据静力荷载的形态又分成点荷载、均布荷载、弯矩荷载等荷载。

#### 3.5.2.1 点荷载

当使用简化的二维模型时，原三维模型中沿厚度方向分布的线荷载(例如列车荷载)需要转换为点荷载。

需要注意的是，如图(3.5.3)所示只有在圆弧半径或多折线形破坏面以内的点荷载才会用于计算安全系数，其他位置(图中虚线标记)的点荷载将会被忽略不计。

荷载的方向可定义为法向、整体坐标系的X， Z方向。

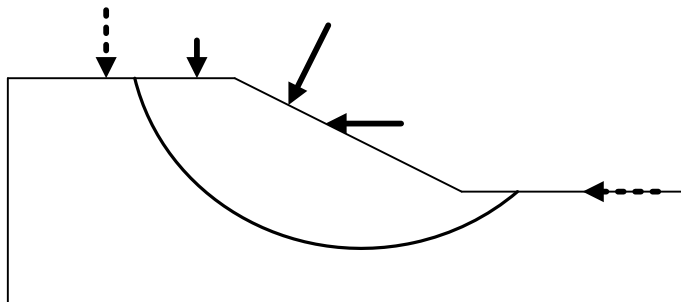


图 3.5.3 适用的点荷载

### 3.5.2.2 均布荷载

当使用简化的二维模型时，原三维模型中的面荷载需要转换为均布荷载。因为均布荷载将包含在条分力中，因此只能输入沿整体坐标系-Z方向的均布荷载。均布荷载两端的荷载值可以不同。

如图3.5.4所示，虚线标记的均布荷载是输入的荷载，计算时只搜索破坏面区域内的荷载，这些荷载将直接加载到破坏面上(标记为实现的荷载)。

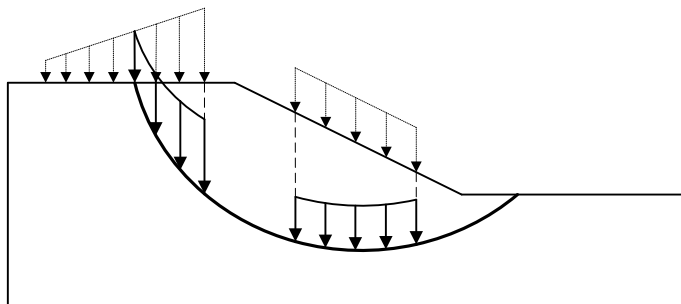


图 3.5.4 均布荷载



### 3.5.2.3 弯矩荷载

弯矩荷载虽然在实际工程中用的不多，但是有时对于大边坡上的一些小的结构无法详细建模，有时就可以简化为一些集中荷载或弯矩作用在边坡上。

与点荷载和均布荷载一样，程序只使用破坏面范围内的弯矩荷载(参见下图中实线标记的荷载)。

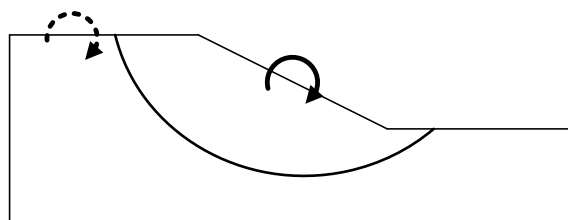


图 3.5.5 弯矩荷载

### 3.5.3 静力地震荷载

静力地震荷载是将地震时发生的动力荷载转换为静力荷载作用在边坡上，在极限平衡法计算安全系数时考虑地震的影响。考虑到地震荷载的特性，静力地震荷载的方向可以考虑水平和竖向两个方向。在程序中输入的是水平和竖向的地震影响系数，程序内将该系数乘以重力加速度和破坏面内的土体质量生成静力地震荷载并作用于破坏面的中心上。

如图3.5.6所示，对A区域地面以上的水只考虑竖向地震荷载，不考虑水平地震荷载。但是对于土体中的地下水假设地震时不容易排水，所以考虑了地下水的水平和竖向地震荷载。

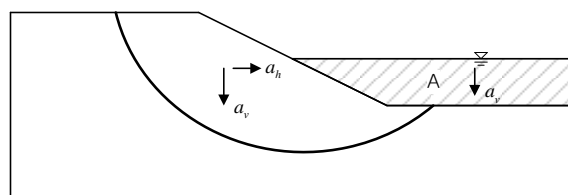


图 3.5.6 地震影响系数的使用

## 3.6 定义岩土材料

极限平衡法中评价条形滑动面的抵抗能力时一般使用库伦摩擦准则。库伦的摩擦准则用粘聚力  $c$  和内摩擦角  $\phi$  定义破坏面。下面介绍一下土体深度、条分滑动面的角度、 $\sigma-\tau$  关系曲线对这两个参数的影响。

### 3.6.1 随深度变化的粘聚力

为了模拟粘聚力随深度增加的特性，在定义岩土特性时需要输入粘聚力的变化值。条分滑动面的粘聚力  $c$  计算公式如下。

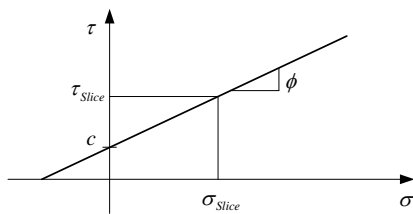
$$c = c_0 + \Delta c(z_0 - z_i) \quad (3.6.1)$$

其中，

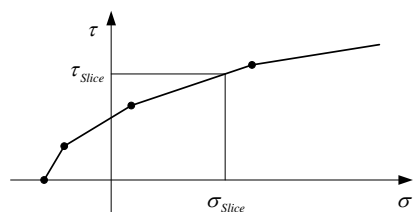
- $c_0$  : 包含条分滑动面的某土层的初始粘聚力
- $\Delta c$  : 单位深度粘聚力增量(kN/m<sup>2</sup>)
- $z_0$  : 包含条分滑动面的土层上端深度
- $z_i$  : 条分滑动面的中心点深度

### 3.6.2 非线性选项

如图3.6.1(a)所示，库伦破坏准则只能考虑线性变化，而大部分岩土材料具有非线性特性，图3.6.1(b)为通过实验获得的非线性的  $\sigma-\tau$  关系曲线。在SoilWorks中用户可自定义非线性的  $\sigma-\tau$  关系曲线。



(a) 库伦破坏准则



(b) 用户自定义破坏准则

图 3.6.1 破坏准则

### 3.6.3 各向异性条件

粘聚力不仅随深度会发生变化，如图3.6.2所示也会随着条分滑动面的角度 $\alpha$ 发生变化。在程序中可以定义条分滑动面的角度 $\alpha$ 与粘聚力的关系曲线(角度范围为 $-90^0$ 到 $90^0$ )。 $\alpha$ 的定义参见图3.4.1和3.4.4(箭头方向为正)。

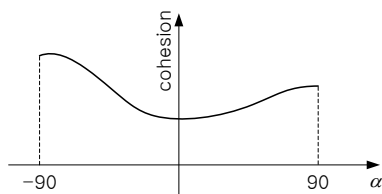


图 3.6.2 各向异性条件时随条分滑动面变化的粘聚力

## 3.7 加固方法

一般来说，土体在不受外力影响时不会发生滑坡。但是在施工、渗流、附加荷载等外因作用下边坡有可能发生破坏。为了防止边坡的破坏，有时会对边坡进行加固，加固措施中使用较为广泛的是设置支护的方法。

SoliWorks中提供的支护构件有锚、土钉、板带、支撑，只有充分了解这些构件的特性并准确输入其特性参数时才能得到准确的安全系数。

SoilWorks的对支护构件可定义扩散宽度和扩算角度，这样可以更真实的模拟实际受力和变形(参见附录说明)。

### 3.7.1 锚

在边坡中布置锚索并施加一定张力是防止滑坡的有效的方法。锚只能承受轴力，锚大体上分为张拉段和锚固段。

锚杆抵抗滑坡的主要力学特性有抗拔力  $P_{Resist}$  和抗拉力  $T_{Yield}$ 。假设锚的抗拉强度足够大，边坡滑动面通过锚时，锚本身虽然没有被拉断但有可能被拔出，此时锚抵抗边坡滑动的抵抗力  $R_{Anch}$  实际为锚的抗拔力，此时需要使用抗拔力计算边坡的安全系数。反之，当锚的抗拔力远大于锚的抗拉强度时，锚抵抗边坡滑动的抵抗力  $R_{Anch}$  为锚的抗拉强度。锚的实际抵抗力  $R_{Anch}$  可用下面公式表示。

$$R_{Anch} = \min(P_{Resist}, T_{Yield}) \quad (3.7.1)$$

SoilWorks中将锚的抗拔力  $P_{Resist}$  和抗拉强度  $T_{Yield}$  两者中的较小值作为其程序中输入的抗拉强度。

为了给锚施加预拉力需要将锚锚固，锚固段对于锚能否充分发挥其抗滑坡能力起着至关重要的作用。当边坡滑动面通过张拉段时(图3.7.1的A锚)，需要使用抗拔力  $P_{Resist}$  计算边坡的安全系数。但是当边坡滑动面经过锚固段时(图3.7.1的B锚和C锚)，程序中按照下面规则计算锚的抗拉强度。

如图3.7.1所示，锚B和锚C在锚固段的白色点为锚固段的中间点。在SoilWorks中，像锚B一样锚固段的中间点在破坏面范围以外时，该锚杆将视为可抵抗边坡滑动，计算安全系数时可考虑一部分锚固段长度(处于破坏面外的长度部分，程序中选项为“只考虑破坏面外的部分”)，也可以考虑锚固段的全长(程序中选项为“锚固点在弧外全考虑”)；像锚C一样锚固段的中间点在破坏面内时，认为此锚无法抵抗边坡的滑动(程序中选项为“锚固点在弧内不考虑”)，计算安全系数时不予考虑。

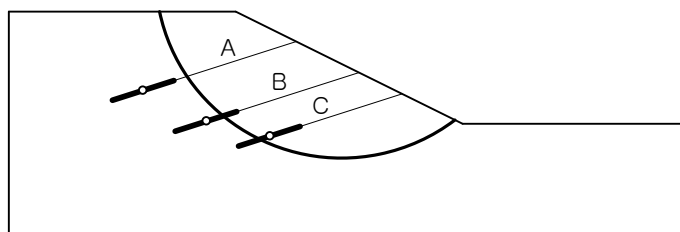


图 3.7.1 锚的计算范围

### 3.7.2 土钉

土钉加固是边坡加固中常使用的加固措施，与锚不同的是不需要输入预拉力，其截面也比较大。土钉抵抗滑坡的能力有轴力和剪力。

根据如何计算土钉的轴向和剪切方向的抗滑坡能力，SoilWorks中提供了以下三种“考虑抗拉/抗剪的方法”选项。

表3.7.1. SoilWorks中的抗滑坡能力计算方法选项

选项	轴向	剪切方向
土钉	取抗拉强度和抗拔力的较小值计算	由用户输入固定的值或函数
桩	不考虑轴向抗滑能力(输入的抗拉力仅用于计算剪应力的上限)	使用塑性弯矩和抗弯刚度计算抗剪
土钉+桩	利用临界角判断采用土钉方式还是桩方式计算	利用临界角判断采用土钉方式还是桩方式计算

### 3.7.2.1 轴向抵抗能力

土钉的轴向抵抗原理与锚相同，也可以分为抗拔强度和抗拉强度。其轴向的抗滑力也和锚一样使用公式(3.7.1)计算。锚是由用户输入抗拔力  $P_{Resist}$  和抗拉强度  $T_{Yield}$  中的较小值，而土钉是使用用户输入的抗拉强度和单位长度抗拔力由程序自动计算抗滑力  $R_{Nail\_axial}$ 。

$$R_{Nail\_Axial} = \min(P_{Resist}, T_{Yield}) \quad (3.7.2)$$

其中的抗拔力  $P_{Resist}$  按下式计算。

$$P_{Resist} = \int_0^{l_{ext}} (l_{ext} \times RCS) dl \quad (3.7.3)$$

其中，

$l_{ext}$  : 滑动面外侧土钉长度(m)

$RCS$  : 单位长度抗拔力(kN/m)

SoilWorks中计算RCS的方法有两种，第一种方法是用户直接输入的方式，第二种方法是使用土体的单位面积极限摩擦力  $q_s$  计算RCS的方法。

$$RCS = q_s \times \pi \times 2R \quad (3.7.4)$$

其中，

$q_s$  : 单位面积极限摩擦力(可由CLOUTERRE、TA 86、Fascicule 62、试验或论文资料中获得)

$\pi$  : 圆周率

$R$  : 等效半径

等效半径是指抗拔构件的半径，如果不考虑土钉周围因注浆增加了截面面积，一般情况下可使用土钉的面积。

当选择了只考虑剪切方向抗滑能力选项时(选择桩选项时)，将只计算剪切抵抗力。

### 3.7.2.2 剪切抵抗能力

定义剪切抵抗能力的方法有两种，一种是有用户直接输入一定的值或者定义函数，另一种是通过特性值来计算。

#### 1. 直接输入剪切抗剪力的方法

土钉的剪切抵抗力  $R_{Nail\_shear}$  一般沿长度方向不变，但是如图3.7.2所示沿着长度方向剪切抵抗力的分布也有可能发生变化。在SoilWorks中可以定义剪切抵抗力与到土钉头部的距离关系曲线，模拟这种沿土钉长度方向变化的抗剪能力。

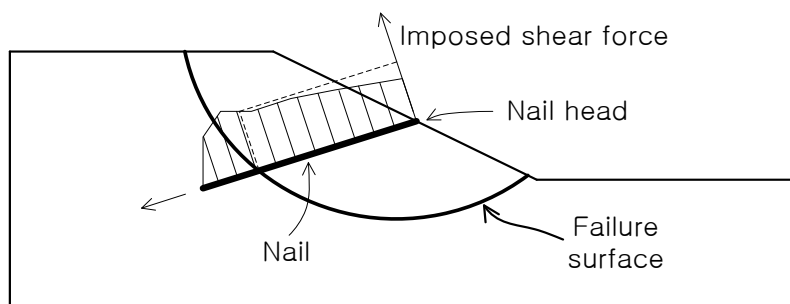


图 3.7.2 沿土钉长度方向变化的土钉的剪切力分布

土钉与锚不同，没有锚固段，所以即使土钉的一部分与破坏面相交也认为可以抵抗边坡滑动。

#### 2. 通过特性值计算剪切抵抗力

有抗剪特性的支护构件遵循特雷斯卡破坏准则，抗剪强度不能超过抗拉强度的50%。

$$T_{Axial} = 2T_{Shear} \quad (3.7.5)$$

$$\left(\frac{R_{Axial}}{2}\right)^2 + R_{Shear}^2 \leq T_{Shear}^2 \quad (3.7.6)$$

其中，

$T_{Axial}$  : 轴向抗拉强度

$T_{Shear}$  : 抗剪强度

$R_{Axial}$  : 轴向抵抗力

$R_{Shear}$  : 抗剪力

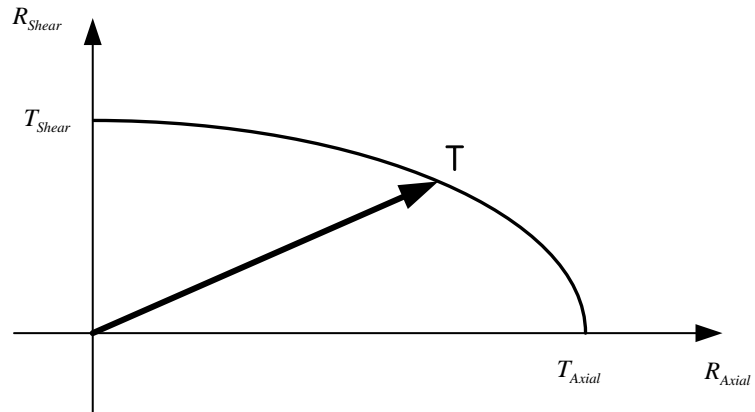


图 3.7.3 支护的安全区域

另外剪切抵抗力以标准长度判断支护构件是刚性还是柔性构件，其对应的抗剪能力公式也不同。标准长度计算公式如下。

$$L_{ref} = 2 \times \left( \frac{4EI}{E_{soil}} \right) \quad (3.7.7)$$

其中，

$EI$  : 支护的抗弯刚度，

$E_{soil}$  : 岩土的水平弹性模量。



SoilWorks以标准长度为基准，取下表中最小值作为剪切抵抗力。

表3.7.2 用标准长度计算土钉的抗剪特性

$L < L_{ref}$ (刚性)	$R_{shear1} = 0.25 \cdot p_{Limit} \cdot B \cdot L$ $R_{shear2} = 0.10 \cdot p_{Limit} \cdot B \cdot L + 4.05 \cdot M_{plastic} \left( 1 - \frac{R_{Axial}^2}{T_{Axial}^2} \right) / L$
$L \geq L_{ref}$ (柔性)	$R_{shear1} = 0.25 \cdot p_{Limit} \cdot B \cdot L_{ref}$ $R_{shear2} = 0.12 \cdot p_{Limit} \cdot B \cdot L_{ref} + 3.24 \cdot M_{plastic} \left( 1 - \frac{R_{Axial}^2}{T_{Axial}^2} \right) / L_{ref}$

其中， $p_{Limit}$ 是岩土极限压力， $B$ 是支护的宽度， $M_{plastic}$ 是支护的塑性弯矩。

如下图所示，支护的最大塑性发生在最大弯曲变形处。

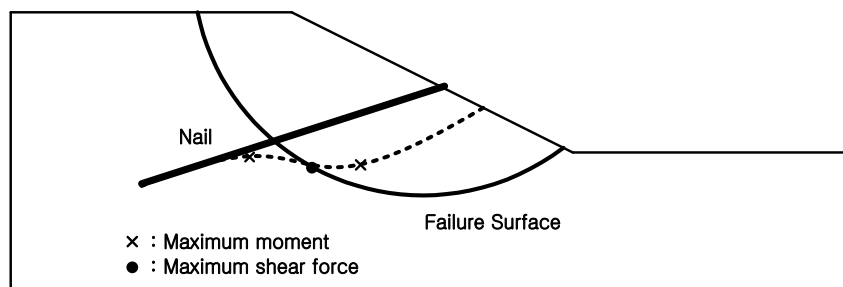


图3.7.4 发生最大弯矩的地方

假设发生最大塑性弯矩处截面为完全塑性，其截面的应力状态如下图所示。

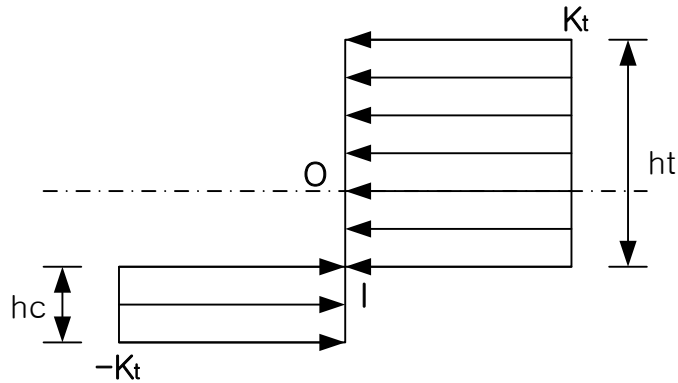


图 3.7.5 完全塑性状态下的轴向应力

假定宽度为  $b$  的矩形截面为完全塑性时，截面处的张力和弯矩计算公式如下。

$$T_{axial} = 2k_t b (h_t - h_c)$$

$$M_t = k_t b (h_t^2 + h_c^2)$$

其中， $k_t$  为支护的抗拉强度， $h_t$  为受拉区高度， $h_c$  为受压区高度。

最大塑性弯矩计算公式如下。

$$M_{plastic} = M_t - T_{axial} \left( \frac{h_t - h_c}{2} \right)$$

另外简支梁的最大容许弯矩由用户输入，可按照如下公式计算。

$$M_{allowable} = \frac{k_t b h^2}{2}$$

根据， $h = h_t + h_c$ 、 $R_{axial} = 2k_t b (h_t + h_c)$  可得最大塑性弯矩计算公式如下。

$$M_{plastic} = M_{allowable} \left( 1 - \frac{T_{axial}^2}{R_{axial}^2} \right)$$

另外，使用表3.7.2中的轴向抵抗力与剪切抵抗力可以绘制如下关系曲线，此时的T为计算得到的抗滑动剪力。

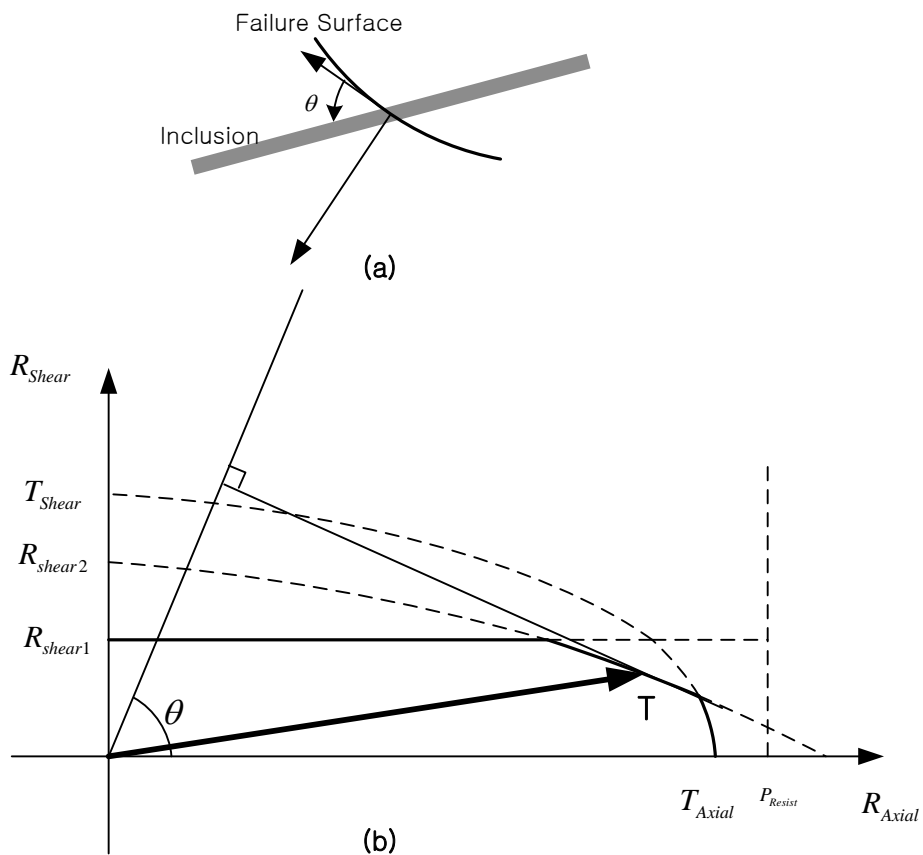


图 3.7.6 剪力计算方式示意图

另外，可根据支护与破坏圆的相对角度决定是按土钉方式还是按桩方式计算支护的抗滑坡能

力。此时需要用户输入临界角( $\theta_{crit}$ )。在临界角的边界线( $\theta_{crit}$  ,  $\frac{\pi}{2} - \theta_{crit}$ )处安全系数有可能突变，因此临界角一般定义为  $5^\circ$  以下。

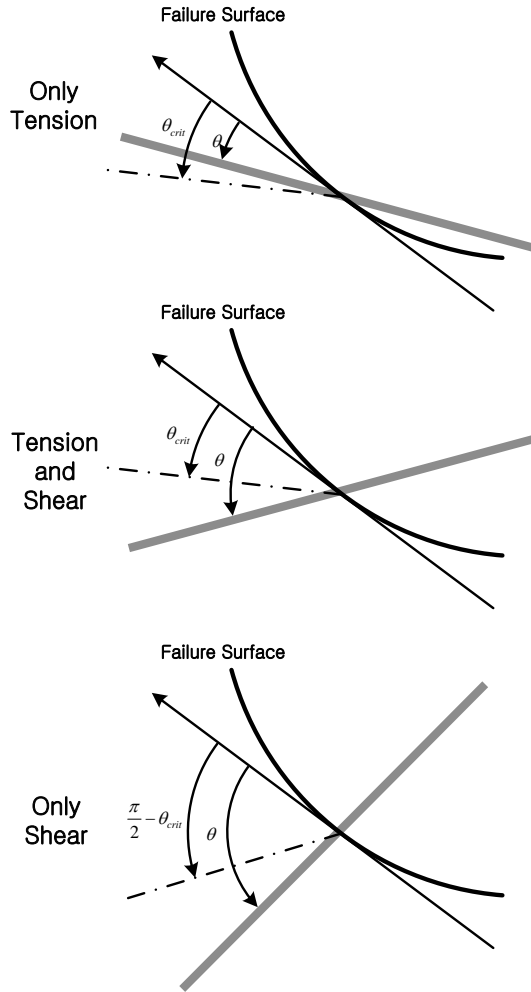


图 3.7.7 临界角适用方法

### 3.7.3 板带(Strip)

板带是为了阻止边坡或开挖面的滑坡而使用的钢材或纤维类型的支护。板带抵抗滑坡的原理就是使用板带的抗拔强度抵抗滑动。如图3.7.3所示，背面土体的自重引起板带竖向力，依据库伦法则可计算板带构件方向的摩擦力，该摩擦力就是板带的抗拔强度，此时仅考虑滑动面外面的板带长度上的摩擦力，板带的最大抵抗力  $R_{Strip}$  计算公式如下。

$$R_{Strip} = \int_0^{l_{ext}} 2B\sigma_v\mu dl \quad (3.7.8)$$

其中，

- $l_{ext}$  : 滑动面外的板带长度
- $B$  : 板带宽
- $\sigma_v$  : 板带上的竖向应力
- $\mu$  : 库伦摩擦系数

如果滑动面外的板带长度为零，即整个板带都在滑动面里时，此时认为板带无法抵抗滑动。

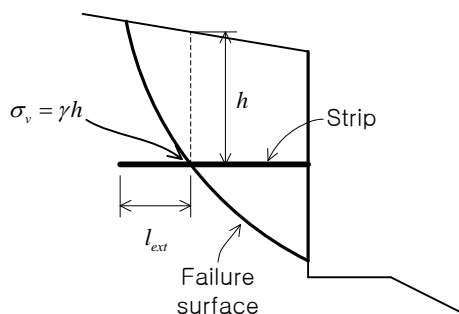


图 3.7.3 板带计算原理

### 3.7.4 支撑

支撑是为了防止开挖面上土的滑落而设置的一种外部支护，虽然其主要作用是防止土体滑落，但其效果也做到了防止边坡滑动。支撑虽然是支护的一种，但是其作用原理与点荷载计算方法一样，所以在此不做详细介绍。

支撑与点荷载不同的是支撑可以定义扩散宽度和扩散角度，因此计算的更符合实际情况。

## 3.8 利用渗流分析结果计算孔隙水压

一般可通过稳态、非稳态渗流分析计算孔隙水压，但是通过此方法来确定准确的水位后再用极限平衡法进行边坡稳定分析是非常困难的，这是因为一般的渗流分析采用的是有限元分析方法，而极限平衡法却是使用条分法。

在本程序中，可使用结果耦合功能读取渗流分析的孔隙水压结果，并将其应用到极限平衡法中，具体方法如下。

### 3.8.1 确定破坏面上的孔隙水压和水位

为了计算破坏面上某点的孔隙水压，需要按下图所示方法确定该点所属的单元，然后利用相应单元的各节点上的孔隙水压，通过内插方法确定计算点的孔隙水压。

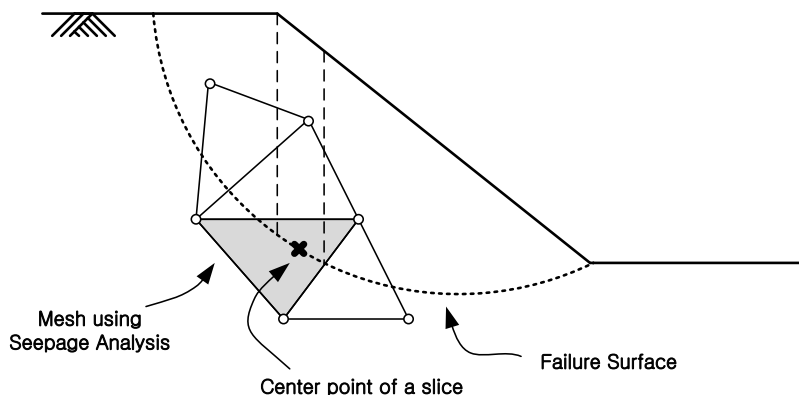


图3.8.1 破坏面上某点的孔隙水压计算方法

程序中将正的孔隙水压位置定义为水位，对于存在正和负孔隙水压的部分可通过插值计算确定水位。

确定水位后，计算土体的重量时水位以下使用饱和单位容重，水位以上部分使用干燥单位容重。

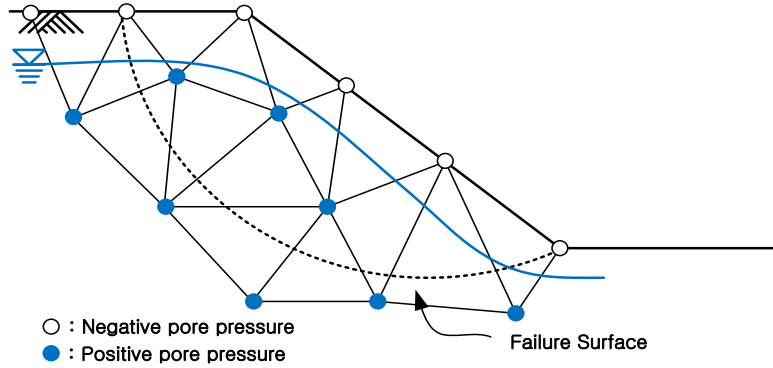


图3.8.2 利用孔隙水压计算水位

极限平衡法中通过耦合分析来计算破坏面上点的孔隙水压需要反复计算才能确定，当单元和条分块较多时需要很长的搜索计算时间。因此如下图所示先按照一定的间距划分区域后，只搜索相应区域内的单元会提高分析效率。

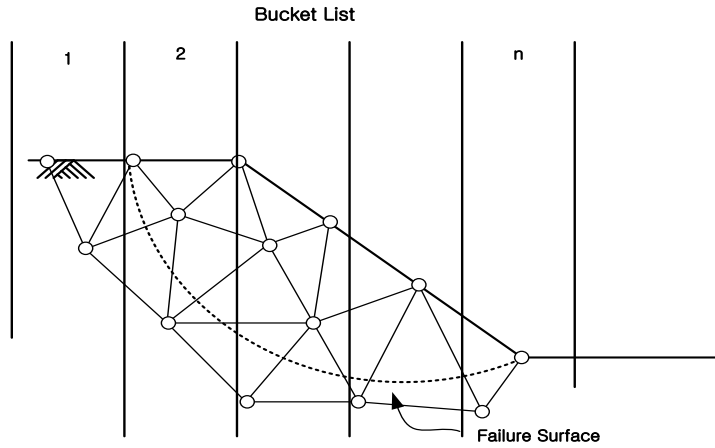


图3.8.3 划分区域示意图



## 附录

### A. 定义扩散宽度和扩散角度

实际支护并非只对破坏面上安装支护的地方起作用，它对周边也起到一定的加固效果。为了考虑这种效果，程序导入了扩散宽度和扩散角度的概念。

使用扩散宽度(diffusion width)和扩散角度(diffusion angle)可查看支护的加固影响范围(见如下图A.1所示)。

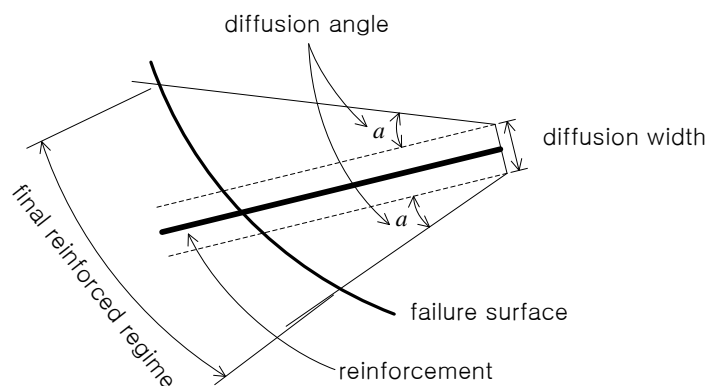


图 A.1 扩散宽度和扩散角度

虽然扩散宽度和扩散角度可以体现实际情况，但是如何确定扩散宽度和扩散角度却没有太多参考的数据。通常扩散宽度是使用支护两端的平均宽度，扩散角度最好通过实验获取，一般也可以输入10~20度。

### B. 支护加固力的分配率

支护的加固效果通过扩散宽度和扩散角度扩大了其影响范围。对于与支护间的夹角小的条块影响效果比较明显，但是对于与支护的夹角较大的条块影响效果就会很小。为了考虑这种分配效果，在3.7章中计算的加固力上乘以下面公式计算的分配率  $\rho$ ，就可以计算各条块上分配的加固力。

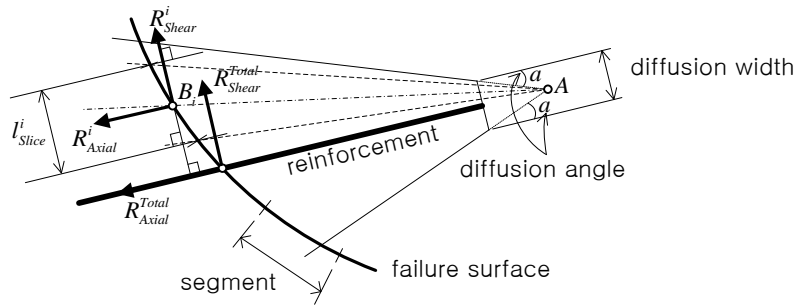


图 B.1 第  $i$  个条块上分配的加固力示意图

首先根据图B.1中的扩散宽度和扩散角度可得到点  $A$  并可得到点到  $A$  到第  $i$  个条块中点  $B_i$  的距离。然后画支护到  $B_i$  的垂线，计算条块投影到垂线的长度  $l_{Slice}^i$ 。通过这种方式计算所有的条块后利用其结果确定分配率，利用计算的分配率可计算第  $i$  个条块的条间力。

$$R_{Axial}^i = \rho_i R_{Axial}^{Tot} \quad (B.1a)$$

$$R_{Shear}^i = \rho_i R_{Shear}^{Tot} \quad (B.1b)$$

其中， $\rho_i$  是条块  $i$  的加固力分配率，利用  $l_{Slice}^i$  和  $\overline{AB}_i$  可按下面公式计算。

$$\rho_i = \frac{\frac{l_{Slice}^i}{\overline{AB}_i}}{\sum_i \frac{l_{Slice}^i}{\overline{AB}_i}} \quad (B.2)$$

由力的平衡条件可得下面公式。

$$R_{Axial}^{Total} = \sum_i R_{Axial}^i \quad (B.3a)$$

$$R_{Shear}^{Total} = \sum_i R_{Shear}^i \quad (B.3b)$$

但是上式(B.3)不能满足弯矩平衡。

根据上式(B.1)和(B.3)条体的加固力分配率须满足下述条件。

$$\sum_i \rho_i = 1 \quad (B.4)$$

当扩散角度  $a$  为0时将不会得到点  $A$ ，此时可按照下列方法计算分配率。

$$\rho_i = \frac{l_{Slice}^i}{\sum_i l_{Slice}^i} \quad (B.5)$$

通过式(B.1)计算的分配给第  $i$  个条体的加固力方向为支护方向，要想使用实际条体的法线和切线方向的条间力  $R_{Normal}^i$  和  $R_{Tangential}^i$  需旋转到条分滑动面的方向。此时可使用如图B.2所示的向量的旋转原则按如下公式计算。

$$R_{Normal}^i = R_{Axial}^i \sin(\alpha_i + \beta) - R_{Shear}^i \cos(\alpha_i + \beta) \quad (B.1a)$$

$$R_{Tangential}^i = R_{Axial}^i \cos(\alpha_i + \beta) + R_{Shear}^i \sin(\alpha_i + \beta) \quad (B.1b)$$

其中，

$\beta$  : 竖轴和支护之间的夹角(参考图B.2)

$\alpha_i$  : 图3.4.1所示第  $i$  个条体的  $\alpha$  值

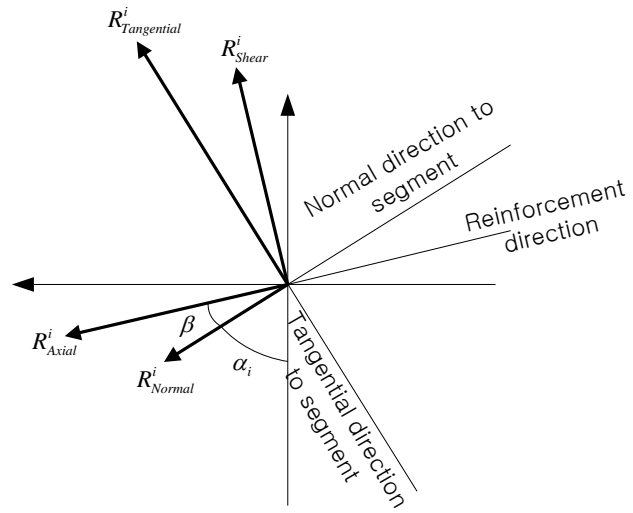


图 B.2 定义  $\beta$

## 第4部分

---

# 固结分析

### 固结分析

#### 第1章 有限元法固结分析

#### 第2章 一维固结分析



# 固结分析

## ○ 固结分析 / 001

### ○ 第1章 有限元法固结分析 / 002

- 1.1 基本方程 / 002
- 1.2 有限元方程 / 003
- 1.3 固结单元的特点 / 008
  - 1.3.1 平面应变单元的自由度 / 009
- 1.4 固结分析时注意事项 / 010
  - 1.4.1 时间和荷载 / 010

### ○ 第2章 一维固结分析 / 012

- 2.1 概要 / 012
- 2.2 沉降量的计算方法 / 013
  - 2.2.1 粘性土的沉降量计算方法 / 013
  - 2.2.2 砂质土的沉降量计算方法 / 015
  - 2.2.3 粘性土的回弹量计算方法 / 017
  - 2.2.4 次固结沉降量计算方法 / 019
- 2.3 有效初始压力和竖向应力增量的计算方法 / 021
  - 2.3.1 有效初始压力 / 021
  - 2.3.2 堆土荷载 / 021
  - 2.3.3 集中荷载 / 023
  - 2.3.4 线荷载 / 023
  - 2.3.5 条形荷载 / 024

2.3.6	矩形荷载 / 025
2.3.7	地层应力增量的计算方法 / 026
2.3.8	堆土荷载加载距离 / 027
2.4	沉降时间与固结度的关系 / 029
2.4.1	未改良时的固结时间 / 029
2.4.2	固结层的换算厚度 / 029
2.4.3	排水工法与固结度的关系 / 032
2.5	堆土荷载引起的地基强度增量 / 043
2.5.1	一般计算公式 / 043
2.5.2	挤密砂桩(碎石桩)工法的地基强度增量 / 043
2.6	各阶段随时间变化的沉降量 / 044
2.6.1	概要 / 044
2.6.2	各阶段总荷载法 / 044
2.6.3	各阶段独立荷载法 / 051





# 固结分析

固结分析是指计算饱和土在外部荷载作用下超孔隙水压随时间消散过程的一种分析方法。

饱和土受压时其附加压力由有效压力和孔隙水压力共同分担。在不排水条件下,附加压力大部分由孔隙水压力承担,此时产生超静水压力水头。在排水条件下,土中的水分在荷载作用下会慢慢地沿着排水边界流出。此时,超孔隙水压逐渐变小,原来由土中孔隙水承担的荷载逐渐由土骨架来承受,最终会导致土体产生变形,土体内的有效应力也逐渐增大。

固结分析主要体现的是随着时间变化超孔隙水压减少、有效应力增加的机理。同时,由于有效应力随着时间增加会导致土体产生变形,该变形不断地在重力方向上累积起来导致土体在重力方向上产生沉降。因此,固结分析还可以计算土体的沉降。

如果结构基础下的地基发生了这种随时间变化的变形,就会导致结构的基础发生沉降,基础的整体沉降和不均匀沉降都会带来安全隐患。

固结分析过程中地基的密度、刚度和强度都会有所增加,但一般不会发生破坏。固结分析之前一般先进行不排水分析,如果不排水分析过程中未发生破坏,固结分析中也不会发生破坏。

固结分析的方法主要有基于理论公式的一维固结分析方法和基于有限元的分析方法两种。一维固结分析的优点是可以通过简单的计算非常便捷地获得结果,缺点是只适用于二维分析模型,无法适用于比较复杂的地质条件情况。而有限元分析方法则不受形状、条件的限制,不过建模和分析所需的时间较多。

在SoilWorks中既提供一维固结分析方法,也提供有限元的分析方法。



# 有限元法固结分析

## 1.1 基本方程

固体和流体的分析一般是分开计算或者进行叠加计算的。但比奥特(Biot)提出了土力学上使用的流固耦合分析理论。地基被视为具有孔隙的弹性固体，孔隙内的流体具有压缩性和连续性的特点，并与固体耦合在一起。

比奥特的基本方程式如式(1.1.1)所示。

$$\frac{K}{\gamma_w} \left[ k_x \frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p_w}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial p_w}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.1.1)$$

其中，  
 $K$  : 地基的体积弹性模量  
 $p$  : 平均总应力

为了简化公式，假设其为二维状态。在平衡条件中没有单元荷载时，有效应力的变化率将随着孔隙水压的变化而变化，如式(1.1.2)所示。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial p_w}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

前面已经分别对于固体(式(1.1.1))和流体(式(1.1.2))的基本方程进行了定义。最终，如果假设处于完全饱和状态而且不可压缩的话，从地基单元中流出的水会导致单元体积的减小，可按下式体现。

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.1.3)$$

根据式(1.1.1)，上式可以转化为式(1.1.4)。

$$\frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p_w}{\partial y^2} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.1.4)$$

## 1.2 有限元方程

为了将土体中发生的物理问题和流体问题耦合起来进行分析，需要同时满足物理问题的平衡方程和地下水流动的平衡方程。为此，首先利用虚功原理推导土颗粒物理问题的能量守恒条件。

饱和地基的内部虚功  $W_{in}$  如下。

$$W_{in} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} dV \quad (1.2.1)$$

此时，总应力  $\boldsymbol{\sigma}$  可按下式定义。

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{m} \sigma_w = \begin{Bmatrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \sigma'_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sigma_w \quad (1.2.2)$$

其中，

$\boldsymbol{\sigma}'$  : 有效应力

$\sigma_w$  : 孔隙水压

$$\mathbf{m} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T$$

此时，有效应力  $\boldsymbol{\sigma}'$  如下。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{d} \quad (1.2.3)$$

其中，

- $\mathbf{D}$  : 材料刚度矩阵
- $\boldsymbol{\varepsilon}$  : 弹性应变
- $\mathbf{B}$  : 应变-位移关系矩阵
- $\mathbf{d}$  : 位移

另外，单元内任意位置的孔隙水压  $\sigma_w$  可表示如下。

$$\sigma_w = \mathbf{N}_w \mathbf{p} \quad (1.2.4)$$

其中，

- $\mathbf{N}_w$  : 孔隙水压的单元形函数
- $\mathbf{p}$  : 节点孔隙水压

因此，式(1.2.2)可变化如下。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{m}\mathbf{N}_w \mathbf{p} \quad (1.2.5)$$

将式(1.2.5)代入式(1.2.1)，利用  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta\mathbf{d}^T : \mathbf{B}^T$  整理虚位移  $\delta\mathbf{d}^T$  可得到下式(1.2.6)。

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= \delta\mathbf{d}^T \left[ \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{B} \mathbf{m} \mathbf{N}_w \mathbf{p}) dV \right] \\ &= \delta\mathbf{d}^T [\mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{C} \mathbf{p}] \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

其中， $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$ ， $\mathbf{C} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_w dV$ 。

对于外部虚功，考虑表面力和体积力时如下。

$$W_{ext} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{body} + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{surface} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{F} \quad (1.2.7)$$

根据虚功原理，式(1.2.6)和(1.2.7)需要达到平衡。这样就得到了针对物理问题的平衡方程。

$$\mathbf{Kd} + \mathbf{Cp} = \mathbf{F} \quad (1.2.8)$$

如前所述，为了将物理问题和流体问题耦合起来进行固结分析，除了物理问题的平衡方程之外，还需要流体问题的平衡方程。

如图1.2.1所示，假设土体上的单位时间流量为 $Q$ ，各个方向上水的流速分别为 $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_z$ ，则流入的流量如下。

$$Q_{int} = v_x dydz + v_y dx dz + v_z dx dy + q_{ext} = V \left( \frac{v_x}{dx} + \frac{v_y}{dy} + \frac{v_z}{dz} \right) + q_{ext} \quad (1.2.9)$$

另外，流出的流量如下。

$$\begin{aligned} Q_{out} &= \left( v_x + \frac{dv_x}{dx} dx \right) dydz + \left( v_y + \frac{dv_y}{dy} dy \right) dx dz + \left( v_z + \frac{dv_z}{dz} dz \right) dx dy \\ &= V \left( \frac{v_x}{dx} + \frac{v_y}{dy} + \frac{v_z}{dz} \right) + V \left( \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz} \right) \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

假设水为非压缩性同时土体处于完全饱和状态，则流入量和流出量的差异就可以看做是土体的体积随时间发生变化而导致的。将这种关系进行整理，可按下式表述。

$$V \left( \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz} \right) - q_{ext} = -\frac{d\Delta V}{dt} \quad (1.2.11)$$

将上式两边都除以体积 $V$ 可得单位体积流量如下。

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz} - \frac{d\varepsilon_v}{dt} = \frac{q_{\text{ext}}}{V} \quad (1.2.12)$$

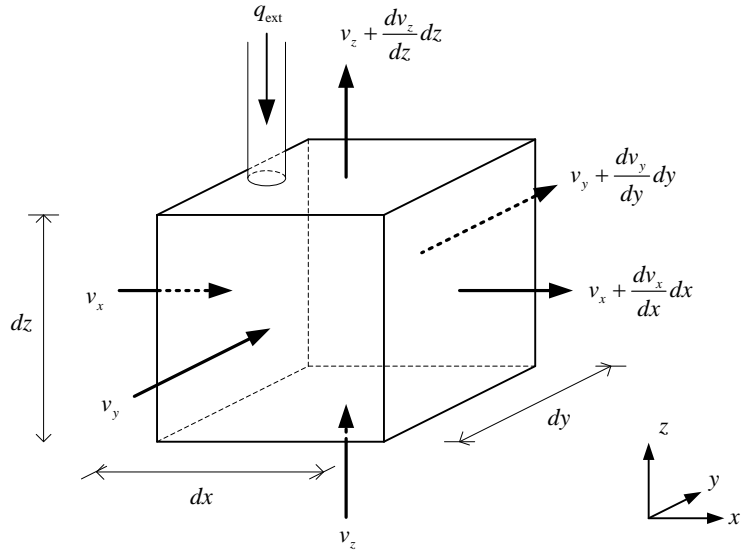


图 1.2.1 土体内水的流入流出示意图

根据虚功原理，将单位体积的内虚功  $\delta \mathbf{p}^T \mathbf{q}_{\text{int}}$  按整个体积进行积分，则得到内虚功如下。

$$W_{\text{int}} = \int_V \delta \nabla(p)^T v + \delta p^T \frac{d\varepsilon_v}{dt} dV \quad (1.2.13)$$

将  $\delta \nabla(p)^T = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{B}_w^T$ 、 $\delta p^T = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}_w^T$  以及  $\varepsilon_v = \mathbf{m}^T \mathbf{Bd}$  代入上式，可得如下公式。

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= \delta \mathbf{p}^T \int_V \frac{1}{\gamma_w} \mathbf{B}_w^T \alpha \mathbf{B}_w \mathbf{p} + \frac{1}{dt} \mathbf{N}_w^T \mathbf{m}^T \mathbf{Bd} dV \\ &= \delta \mathbf{p}^T \left( \frac{1}{dt} \mathbf{C}^T \mathbf{d} + \mathbf{Sp} \right) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

其中,  $\mathbf{C}^T = \int_V \mathbf{N}_w^T \mathbf{m}^T \mathbf{B} dV$ ,  $\mathbf{S} = \frac{1}{\gamma_w} \int_V \mathbf{B}_w^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{B}_w dV$ 。

外虚功计算公式如下。

$$W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{Q} \quad (1.2.15)$$

式(1.2.14)和(1.2.15)需满足平衡条件, 则得到流体问题的平衡方程。

$$\frac{1}{dt} \mathbf{C}^T \mathbf{d} + \mathbf{S} \mathbf{p} = \mathbf{Q} \quad (1.2.16)$$

将式(1.2.8)和式(1.2.16)用时间增量(时间  $t \rightarrow t + \Delta t$ )的差分方程可表示如下。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{C}(\theta \Delta \mathbf{p} + \mathbf{p}_0) &= \Delta \mathbf{F} \\ \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{d} + \Delta t \mathbf{S}(\theta \Delta \mathbf{p} + \mathbf{p}_0) &= \Delta t \mathbf{Q} \end{aligned}$$

可将上式按矩阵形式表现如下。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \theta \Delta t \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F} - \mathbf{C} \mathbf{p}_0 \\ \Delta t (\mathbf{Q} - \mathbf{S} \mathbf{p}_0) \end{Bmatrix}$$

SoilWorks中使用向后差分方程, 程序内部取值为  $\theta = 1$ 。

### 1.3 固结单元的特点

固结分析使用有限元方法时需要求解的主要参数是位移和孔隙水压(pore fluid pressure)。任意点的位移增量是通过内插函数(interpolation function)得到与节点的位移关系的。同样，任意点的孔隙水压的增量也是通过内插函数来得到与节点的孔隙水压的关系的。

$$\Delta p = \mathbf{N}_w \Delta \mathbf{p}^{\text{nodal}} \quad (1.3.1)$$

上式的左侧是指单元内任意点的孔隙水压增量，右侧分别为孔隙水压的内插函数和节点的孔隙水压增量。SoilWorks中孔隙水压的内插函数和位移的内插函数相同。

固结分析中，单元的节点除了拥有位移自由度，还拥有对于孔隙水压的自由度。SoilWorks中如果没有定义非固结条件和排水条件时，所有单元的节点都视为具有孔隙水压自由度。所以，像堆土那样的不会直接产生固结的单元，如图1.3.1所示需要将其赋予非固结条件。另外，对于固结单元可以排水的边界一定要定义为排水边界条件。正常情况下，在进行完固结分析后，定义为非固结和排水条件的位置的超孔隙水压(excess pore pressure)应该为零。

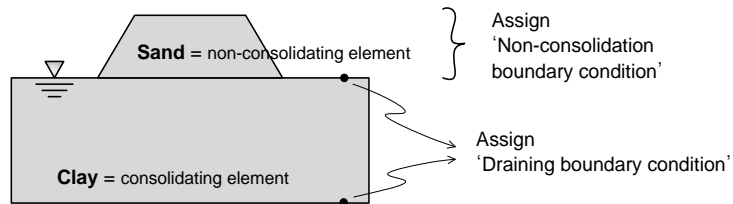


图 1.3.1 固结单元的边界条件

目前可以定义为固结单元的单元类型主要有平面应变(3节点、6节点、4节点、8节点)单元，下面的章节中将对这些单元的位移、孔隙水压的自由度以及积分方式予以详细说明。



### 1.3.1 平面应变单元的自由度

对于高阶单元，节点间的超孔隙水压的结果是通过线性插值得到的，即对于超孔隙水压这些中间节点实际上在分析过程中是不存在的。固结分析中使用的所有超孔隙水压的节点都位于单元角点上，内插函数都使用一次线性函数。从水压的分布特点来看，这样的描述是比较符合实际情况的。

#### 三角形单元

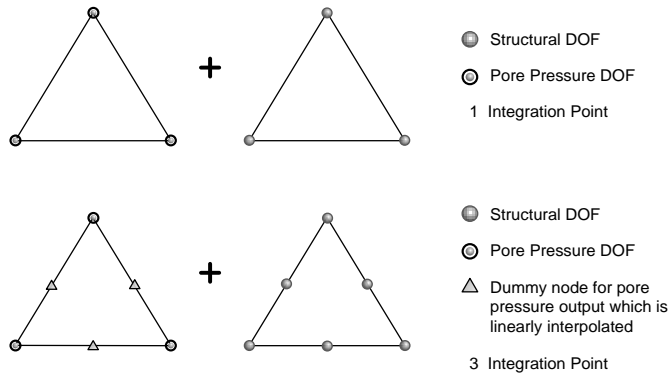


图 1.3.2 低阶 3 节点和高阶 6 节点三角形单元的自由度

#### 四边形单元

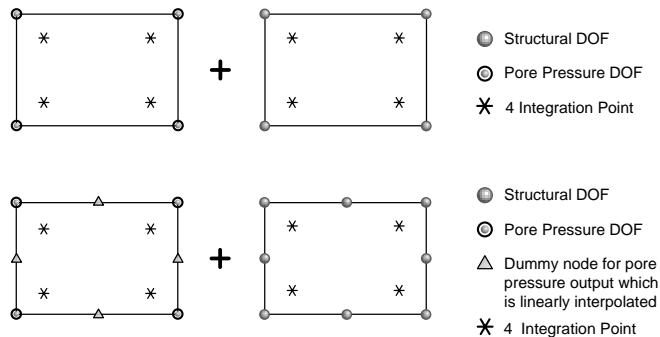


图 1.3.3 低阶 4 节点和高阶 8 节点四边形单元的自由度

## 1.4 固结分析时的注意事项

### 1.4.1 时间和荷载

进行固结分析时，附加荷载的施加时间以及分布可以如下图所示，按输入时间和荷载系数来实现。

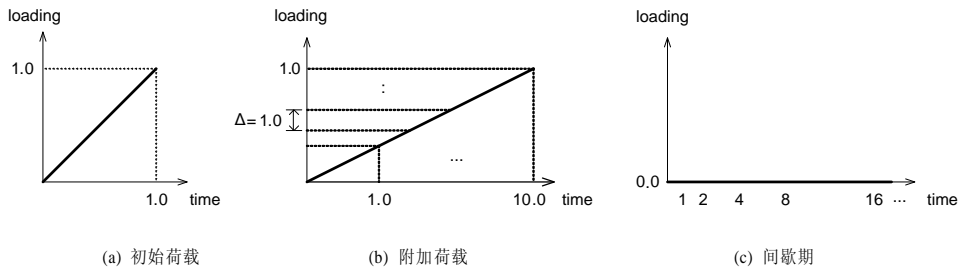


(a) 初始荷载

(b) 附加荷载

(c) 间歇期

图 1.4.1 时间和荷载系数的输入对话框



(a) 初始荷载

(b) 附加荷载

(c) 间歇期

图 1.4.2 时间和荷载关系曲线

使用修正的剑桥模型(Modified Cam-Clay)来进行固结分析时，对于自重需要先进行线性静力分析，获得初始荷载作用下的初始应力，所以对于初始荷载可以像图1.4.2的(a)所示直接进行一次性加载。

对于附加荷载需要考虑时间效应，因此需要像图1.4.2的(b)所示将总的时间按一定的间距划分后逐步加载。图中附加荷载的总加载时间为10天，荷载步骤数为10，荷载系数之和为1.0。当附加荷载增量较大或加载时间增量较大时，固结分析不易收敛，此时需要适当减小荷载系数增量和时间增量，且荷载系数之和应该为1.0。

堆土结束后(附加荷载加载结束)，需要进行只有时间变化的放置分析(间歇期分析)。如图1.4.2(c)所示，此时只有时间的增加，没有荷载的变化。固结分析的特点是初期的应力变化非常显著，所以初期的时间间距要设置小一些，后期的时间间距可以设置大一些，这样既保证了收敛性和分析精度，又缩短了分析时间。



# 一维固结分析

## 2.1 概要

本章介绍软弱地基分析的理论背景。为了计算一维固结沉降量，软弱地基的分析主要提供以下功能。

- ✓ 软弱粘土的固结沉降量计算(Cc法、Mv法、 $\Delta e$ 法)
- ✓ 考虑荷载加载阶段的沉降量和固结度计算
- ✓ 不同加载阶段的强度增量计算
- ✓ 基于布西奈斯克(Boussinesq)公式的应力增量计算
- ✓ 沙土的瞬间沉降量计算(De Beer法、B.K.Hough法)
- ✓ 次固结沉降量计算
- ✓ 可以考虑多种形式荷载作用(集中荷载、线荷载、条形荷载、矩形荷载)
- ✓ 利用 $e$ -logP、logMv-logP、logCv-logP曲线计算各土层参数
- ✓ 超固结和正常固结分析功能
- ✓ 沉降计算时可考虑挤密砂桩(SCP)和挤密碎石桩(GCP)的影响
- ✓ 可以考虑涂抹效果和井阻

## 2.2 沉降量的计算方法

### 2.2.1 粘性土的沉降量计算方法

1)  $C_c$  法

$$S = \frac{\Delta e}{1 + e_0} H \quad (2.2.1)$$

其中,  $S$ : 固结沉降量,  $H$ : 固结层的厚度,  $e_0$ : 初始孔隙率,  $\Delta e$ : 孔隙率的变化量

对于正常固结粘土( $P_0 \geq P_c$ ):

$$\Delta e = C_c \cdot \log\left(\frac{P_0 + \Delta P}{P}\right) \quad (2.2.2)$$

$$S = \frac{C_c \cdot H}{1 + e_0} \cdot \log\left(\frac{P_0 + \Delta P}{P}\right) \quad (2.2.3)$$

对于超固结粘土( $P_0 < P_c$ ):

$P_0 < P_0 + \Delta P < P_c$  时

$$\Delta e = C_s \cdot \log\left(\frac{P_0 + \Delta P}{P_0}\right) \quad (2.2.4)$$

$$S = \frac{C_s \cdot H}{1 + e_0} \cdot \log\left(\frac{P_0 + \Delta P}{P_0}\right) \quad (2.2.5)$$

$P_0 < P_c < P_0 + \Delta P$  时

$$\Delta e = \Delta e_1 + \Delta e_2 = C_s \cdot \log \frac{P_c}{P_0} + C_c \cdot \log\left(\frac{P_0 + \Delta P}{P_c}\right) \quad (2.2.6)$$

$$S = \frac{C_s \cdot H}{1 + e_0} \cdot \log \frac{P_c}{P_0} + \frac{C_c \cdot H}{1 + e_0} \cdot \log \left( \frac{P_0 + \Delta P}{P_c} \right) \quad (2.2.7)$$

其中， $S$ ：固结沉降量， $H$ ：固结层的厚度， $C_s$ ：膨胀系数， $P_0$ ：有效初始荷载， $P_c$ ：先期固结荷载， $e_0$ ：初始孔隙率， $C_c$ ：压缩系数， $\Delta P$ ：堆土和外部荷载引起的竖向应力的增量

2)  $\Delta e$  法

$$S = \frac{e_0 - e_1}{1 + e_0} H \quad (2.2.8)$$

其中， $S$ ：固结沉降量， $H$ ：固结层的厚度， $e_0$ ：初始孔隙率(有效初始荷载  $P_0$  对应的孔隙率)， $e_1$ ：固结后的孔隙率(有效初始荷载  $P_0 + \Delta P$  所对应的孔隙率)， $\Delta P$ ：堆土和外部荷载引起的竖向应力的增量

3)  $M_v$  法

$$S = M_v \cdot \Delta P \cdot H \quad (2.2.9)$$

其中， $S$ ：固结沉降量， $H$ ：固结层的厚度， $M_v$ ：体积压缩系数( $\log M_v - \log P$  曲线上  $P_0 + \frac{\Delta P}{2}$  对应的体系压缩系数)， $\Delta P$ ：堆土和外部荷载引起的竖向应力的增量

上面给出的各种固结沉降量计算公式的特点和适用范围如下表所示。

表2.2.1 固结沉降量算式的特点和适用范围

固结沉降量算式	特点	适用范围
$\Delta e$ 法	对于计算斜率或者孔隙率的差值精度相对较好，但计算孔隙率的绝对值则误差较大。 利用很多的固结试验结果绘制 $e - \log P$ 曲线的话，曲线会很散乱，很难以一条平面的曲线来描述。	实际设计中几乎不予使用
$M_v$ 法	使用体积压缩系数时，对于超固结区域斜率较分散，但对于正常固结区域则分散较小可以以一条曲线来描述，因此总体来说精度良好。	适用于试验结果较多或者宽广的区域
$C_c$ 法	压缩系数是指 $e - \log P$ 曲线的直线段斜率。不过之所以使用平均值是因为斜率并不是直线，而是反 S 型曲线或者孔隙率不均匀，这样有可能导致评价过高。另外不同深度的 $C_c$ 也不易确定。	固结试验试样少的区域，或者不进行固结试验而是使用物理试验数据对沉降量进行大概估算时适用

## 2.2.2 砂质土的沉降量计算方法

砂质土层中发生的沉降是指荷载加载的同时发生的瞬间沉降。计算瞬间沉降量的方法有施默特曼(Schmertmann)、梅尔霍夫(Meyerhof)、派克(Peck)、德贝尔(De Beer)、帕里(Parry)等提出的方法，使用不同的方法得到的沉降量也有些差异。

由于对于砂质土层的非扰动试样的采集以及成型都比较困难，所以不易得到准确的力学特性。因此这里提供使用标准贯入试验值( $N$ )来计算砂质土沉降量的德贝尔法(De Beer)和哈夫(B.K.Hough)图表法。

### 1) 德贝尔法(De Beer)

$$S_i = 0.4 \frac{P_0}{N} \cdot H \cdot \log \left( \frac{P_0 + \Delta P}{P_c} \right) \quad (2.2.10)$$

其中， $N$ ：标准贯入试验值， $H$ ：固结层的厚度， $P_0$ ：有效初始荷载， $\Delta P$ ：堆土和外部荷载引起的竖向应力的增量

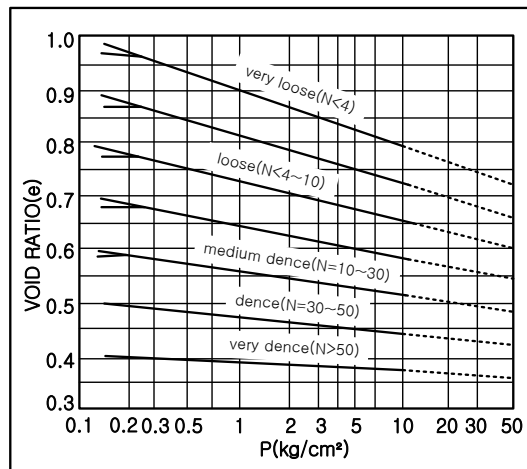
2) 哈夫(B.K.Hough)图表法

哈夫(B.K.Hough)图表法是利用图2.2.1或者表2.2.2来计算孔隙率的方法。

表2.2.2 不同固结压力对应的孔隙率 (B.K.Hough图表法)

固结压力 (P)	孔隙率 $e$				
	非常松散 (N=0~4)	松散 (N=4~10)	普通 (N=10~30)	细密 (N=30~50)	非常细密 (N=50~100)
0.2	0.967	0.780	0.586	0.490	0.395
0.3	0.947	0.760	0.578	0.484	0.392
0.5	0.922	0.742	0.567	0.477	0.388
1.0	0.889	0.714	0.554	0.467	0.383
2.0	0.855	0.688	0.540	0.457	0.378
3.0	0.836	0.678	0.532	0.451	0.375
5.0	0.811	0.662	0.521	0.443	0.372
10.0	0.778	0.640	0.507	0.433	0.367
20.0	0.744	0.621	0.493	0.423	0.362
30.0	0.725	0.611	0.485	0.417	0.359
50.0	0.700	0.600	0.475	0.410	0.355



图 2.2.1  $e - \log P$  曲线 (B.K.Hough 图表法)

### 2.2.3 粘性土的回弹量计算方法

如果将覆土和外部荷载去掉，粘性土会发生回弹。回弹量的计算与沉降量的计算类似，计算方法如下。

#### 1) $C_s$ 法

$C_s$  法的回弹量是根据卸载的应力  $\Delta P$  和卸载后的  $e - \log P$  曲线的斜率  $C_s$  来计算的(如图2.2.2所示)。

$$S_h = \frac{C_s}{1 + e_1} \cdot H_b \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2 + \Delta P}{P_2} \right) \quad (2.2.11)$$

其中， $C_s$ ：卸载系数， $e_1$ ：卸载前的孔隙率， $H_b$ ：卸载前的层厚度(初始的层厚度  $H_0$  中减去卸载之前为止的沉降量)， $P_2$ ：卸载后的应力 ( $= P_1 - \Delta P$ )

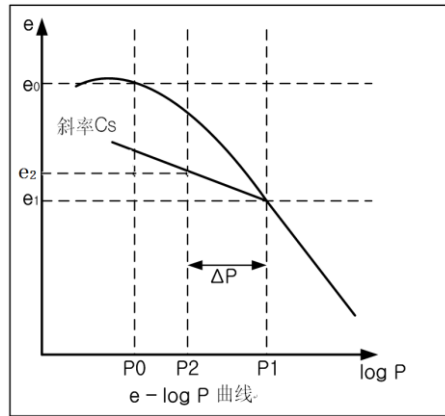


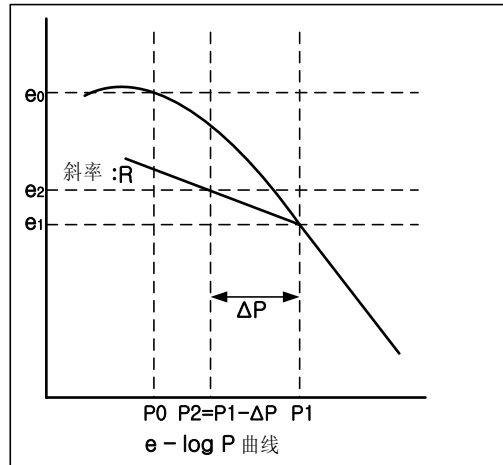
图 2.2.2  $C_c$  法中卸载系数的定义

2)  $\Delta e$  法

$\Delta e$  法的回弹量是根据卸载前后的孔隙率和卸载后的  $e - \log P$  曲线的斜率  $R$  来计算的(如下图 2.2.3所示)。

$$S_h = \frac{e_2 - e_1}{1 + e_1} \cdot H_b \quad (2.2.12)$$

其中， $e_1$ ：卸载前的孔隙率， $e_2$ ：卸载后的孔隙率， $H_b$ ：卸载前的层厚度(初始的层厚度  $H_0$  中减去卸载之前为止的沉降量)， $P_2$ ：卸载后的应力 ( $= P_1 - \Delta P$ )

图 2.2.3  $\Delta e$  法中卸载系数的定义3)  $M_v$  法

$M_v$  法的回弹量计算方法如下。

$$S_h = M_{vr} \cdot \Delta P \cdot H_b \quad (2.2.13)$$

其中， $M_{vr}$ ：卸载系数， $H_b$ ：卸载前的层厚度(初始的层厚度  $H_0$  中减去卸载之前为止的沉降量)

卸载系数一般认为总是正值(+). 卸载系数为0时，意味着卸载时没有发生回弹。另外，对于砂质土不计算回弹量。

### 2.2.4 次固结沉降量计算方法

超孔隙水压完全消散后产生的压缩成为次固结(secondary consolidation)。如下图所示，主固结结束后的次固结区段几乎是一条直线，因此可以根据直线的斜率计算次固结系数  $C_a$ 。

$$C_a = \frac{\Delta H/H_p}{\Delta \log_{10} t} \quad (2.2.14)$$

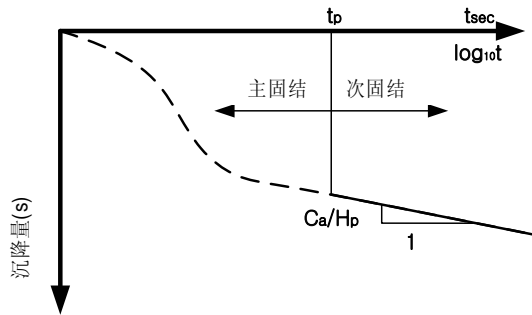


图 2.2.4 次固结系数的确定

一般次固结系数使用美国海军规范NAVFAC DM 7.2中的自然函数比对应的值。次固结沉降量按下式计算。

$$S_2 = C_a \cdot H_p \cdot \log \frac{t_s}{t_p} \quad (2.2.15)$$

其中， $S_2$ ：次固结沉降量， $C_a$ ：次固结系数， $H_p$ ：初始厚度中减去主固结沉降量之后的固结层厚度， $t_s$ ：要计算的次固结时间， $t_p$ ：主固结结束时间

## 2.3 有效初始压力和竖向应力增量的计算方法

### 2.3.1 有效初始压力

对于地下水位以上的地基层，单位体积重量使用湿重量；而对于地下水位以下的地基层，需要计算有效应力，所以使用的是饱和容重。如图所示，对于某一土层 $i$ 的中间点的有效初始压力(加载前由原始地基的自重产生的压力)可以计算如下。

$$P_{0,i} = \gamma_1 H_1 + \dots + \gamma_{i-1} H_{i-1} + \frac{1}{2} \gamma_i H_i \quad (2.3.1)$$

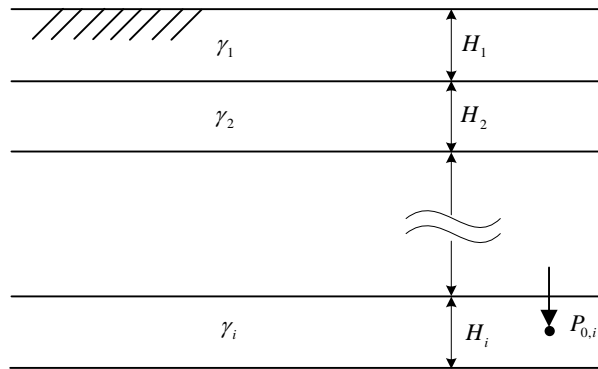


图 2.3.1 有效初始压力

### 2.3.2 堆土荷载(embankment load)

对于堆土荷载(或路堤荷载)导致的地基应力增量，可通过条形荷载作用在相邻两点间的微小区间，然后计算微小小区段增加的应力，最后将各微小小区段结果叠加来求解(图2.3.2)。

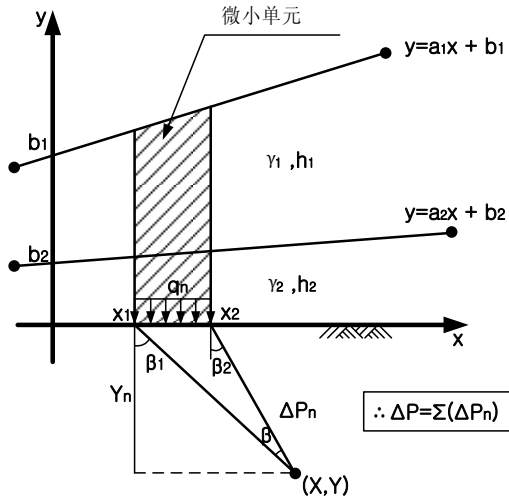


图 2.3.2 堆土荷载导致的地层应力

微小区间对应的荷载  $q_n$  如下。

$$q_n = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \dots + \gamma_i h_i \quad (2.3.2)$$

在微小区间的荷载  $q_n$  作用下的任意点(x, y)发生的地层应力增量  $\Delta P_n$  如下。

$$\Delta P_n = \frac{q_n}{\pi} [\sin \beta \cdot \cos \phi + \beta] \quad (2.3.3)$$

$$\Delta P = \Sigma[\Delta P_n] \quad (2.3.4)$$

其中， $\beta = \beta_1 - \beta_2$ ， $\phi = \beta_1 + \beta_2$ ， $\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{x - x_1}{Y_n}\right)$ ， $\beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{x - x_2}{Y_n}\right)$

### 2.3.3 集中荷载

如下图所示，在地表面有集中荷载  $P$  作用时，布西奈斯克(Boussinesque)对地层内的土单元上的应力提出了如下的计算式。

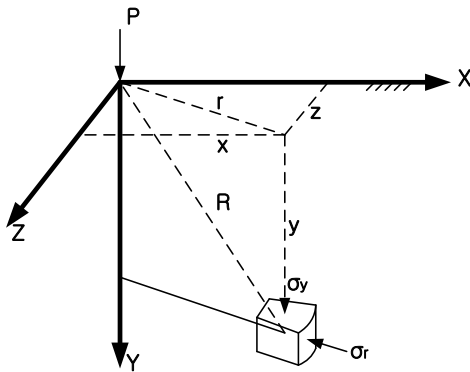


图 2.3.3 集中荷载作用下的地层应力

$$\Delta P = \frac{3P}{2\pi R^5} y^3 = \frac{3P}{2\pi} \frac{y^3}{(r^2 + y^2)^{5/2}} \quad (2.3.5)$$

其中，

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + y^2} \quad (2.3.6)$$

### 2.3.4 线荷载

如图2.3.4所示，地表面有单位长度的线荷载  $q$  作用时，地层内的任意点的应力增量可计算如下。

$$\Delta P = \frac{2qy^3}{\pi(x^2 + y^2)^2} \quad (2.3.7)$$

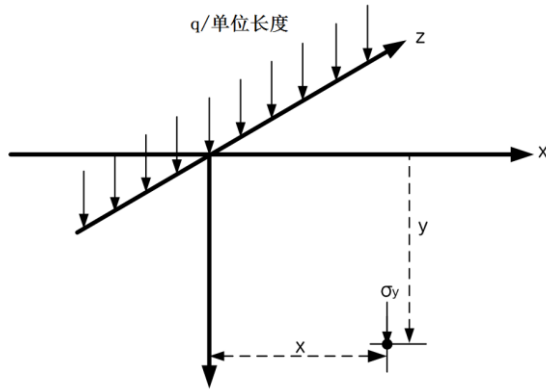


图 2.3.4 线荷载作用下的地层应力

### 2.3.5 条形荷载

条形荷载作用下的应力增量可以通过对线荷载的应力增量进行积分求得。

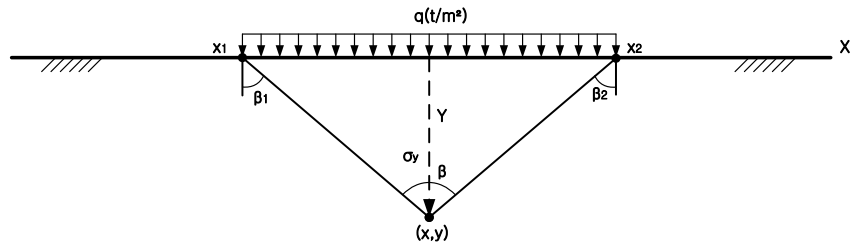


图 2.3.5 条形荷载作用下的地层应力



$$\begin{aligned}
\Delta P &= \frac{2q}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} dx \\
&= \frac{2qy^3}{\pi} \left[ \frac{1}{2y^2} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y} \cdot \tan^{-1} \frac{x}{y} \right) \right]_{x_1}^{x_2} \\
&= \frac{q}{\pi} \left[ \left( \frac{x_2 y}{x_2^2 + y^2} + \tan^{-1} \frac{x_2}{y} \right) - \left( \frac{x_1 y}{x_1^2 + y^2} + \tan^{-1} \frac{x_1}{y} \right) \right] \\
&= \frac{q}{\pi} \left( \frac{x_2 y}{R_2^2} - \frac{x_1 y}{R_1^2} + \beta_2 - \beta_1 \right)
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

因为  $R_1^2 = x_1^2 + y^2$ ， $R_2^2 = x_2^2 + y^2$ ，所以上式可以写为如下形式。

$$\begin{aligned}
\Delta P &= \frac{q}{\pi} (\sin \beta_2 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_1 + \beta_2 - \beta_1) \\
&= \frac{q}{\pi} [\sin(\beta_2 - \beta_1) \cdot \cos(\beta_2 + \beta_1) + \beta_2 - \beta_1]
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

其中，如果令  $\beta = \beta_1 - \beta_2$ ， $\phi = \beta_1 + \beta_2$ ， $\beta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{x - x_1}{Y} \right)$ ， $\beta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{x - x_2}{Y} \right)$ ，则

$$\Delta P = \frac{q}{\pi} [\sin \beta \cdot \cos \phi + \beta] \tag{2.3.10}$$

### 2.3.6 矩形荷载

如下图所示，矩形荷载作用下的地层应力增量可按下式计算。

$$\Delta P = \frac{2q}{\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{ab}{yR_3} + \frac{aby}{R_3} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \right] \tag{2.3.11}$$

$$\text{其中， } R_1 = \sqrt{a^2 + y^2}, \quad R_2 = \sqrt{b^2 + y^2}, \quad R_3 = \sqrt{a^2 + b^2 + y^2} \tag{2.3.12}$$

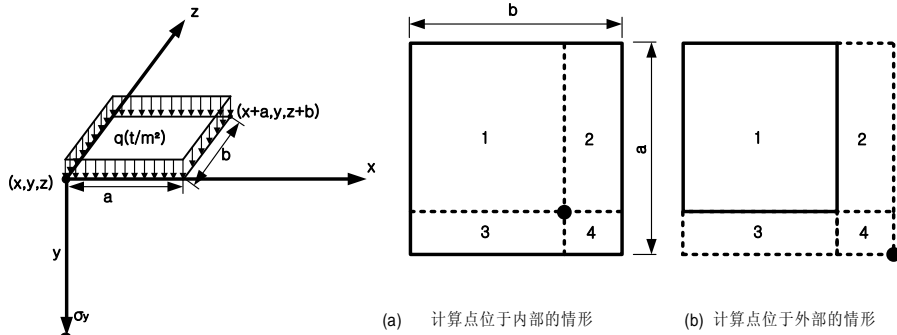


图 2.3.6 矩形荷载作用下的地层应力

计算点位于矩形内部时，可按上图(a)所示分别计算1~4四个矩形的应力后再叠加来计算应力的增量。

$$\Delta P (\text{内部}) = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4 \quad (2.3.13)$$

计算点位于矩形外部时，可按上图(b)所示分别形成四个假想的矩形，再通过加减得到原来的矩形对应的应力增量。

$$\Delta P (\text{外部}) = \Delta P_{1+2+3+4} - \Delta P_{2+4} - \Delta P_{1+3} + \Delta P_4 \quad (2.3.14)$$

### 2.3.7 地层应力增量的计算方法

地表面作用的荷载导致的有效竖向应力增量的计算方法有以下两种。

- 在层中央计算的方法

使用各沉降层中央点的应力增量的方法。

- 使用辛普森法(Simpson)计算的方法

分别计算沉降层的上面、中间、下面各位置的竖向应力，使用辛普森法按下式计算各层中央的应力增量。

$$\Delta P = \frac{1}{6}(\Delta P_t + 4 \cdot \Delta P_m + \Delta P_b) \quad (2.3.15)$$

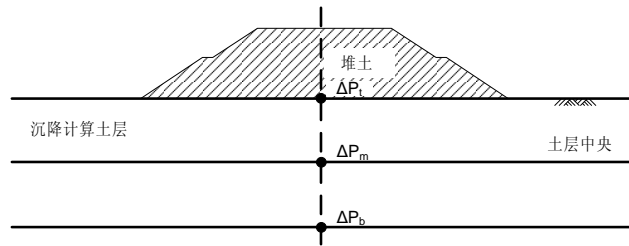


图 2.3.7 利用辛普森法计算应力增量

### 2.3.8 堆土荷载加载距离

计算堆土荷载的地层应力增量时需要确定堆土到计算点的加载距离( $z$ )。确定加载距离的方法有基于堆土底面来计算的方法和按原始地基表面确定的方法两种。

#### 1) 按堆土底面计算加载距离的方法

多阶段堆土时，将各阶段堆土底面到计算点的距离作为加载距离来计算地层的应力增量。

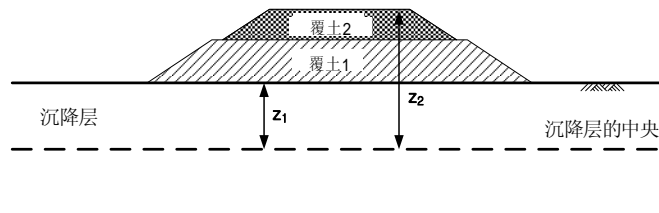


图 2.3.8 将堆土底面到计算点的距离作为加载距离

2) 按原始地基表面来计算加载距离

多阶段堆土时，不管堆土阶段如何，都采用原始地基表面到计算点的距离作为加载距离 ( $z_1 = z_2$ )。

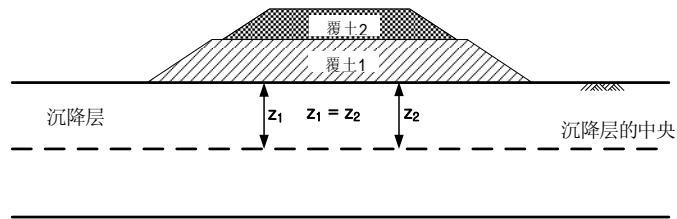


图 2.3.9 按原始地基表面来计算加载距离

## 2.4 沉降时间与固结度的关系

### 2.4.1 未改良时的固结时间

堆土的固结一般为二维或三维，但固结时间的计算可根据太沙基的一维固结理论利用瞬间加载时的固结度和时间系数来计算。

$$t = \frac{T_v \cdot D_d^2}{C_v} \quad (2.4.1)$$

其中， $t$ ：固结时间， $D_d$ ：孔隙水的排水距离， $T_v$ ：时间系数， $C_v$ ：固结系数。

时间系数  $T_v$  是可使用太沙基的简化公式计算如下。

$$T_v = \frac{\pi}{4} \left( \frac{U}{100} \right)^2 \quad : 0\% < U < 53\% \text{ 时} \quad (2.4.2)$$

$$T_v = 1.781 - 0.933 \cdot \log(100 - U) \quad : 53\% < U < 100\% \text{ 时} \quad (2.4.3)$$

### 2.4.2 固结层的换算厚度

各层的固结系数  $C_v$  不同时，可通过层厚度的换算方法得到换算厚度  $H'$  和换算固结系数  $C_v'$  来计算整个层的平均固结度，计算式如下。

$$H' = H_1 \sqrt{\frac{C_v'}{C_{v1}}} + H_2 \sqrt{\frac{C_v'}{C_{v2}}} + \dots + H_n \sqrt{\frac{C_v'}{C_{vn}}} \quad (2.4.4)$$

其中， $H'$ ：换算的层厚度， $H_n$ ：换算前第  $n$  层的厚度， $C_v'$ ：标准换算固结系数， $C_{vn}$ ：换算前第  $n$  层的固结系数

标准换算固结系数  $C_v'$  的取值如下。

取各层的平均值作为  $C_v'$

取最上层的  $C_v$  作为  $C_v'$

取最下层的  $C_v$  作为  $C_v'$

可以分别定义各层的排水条件，不过对于构成换算层的所有土层需要输入相同的排水条件（单面或者双面）。多层地基的排水条件以及各换算层的构成如下图所示。

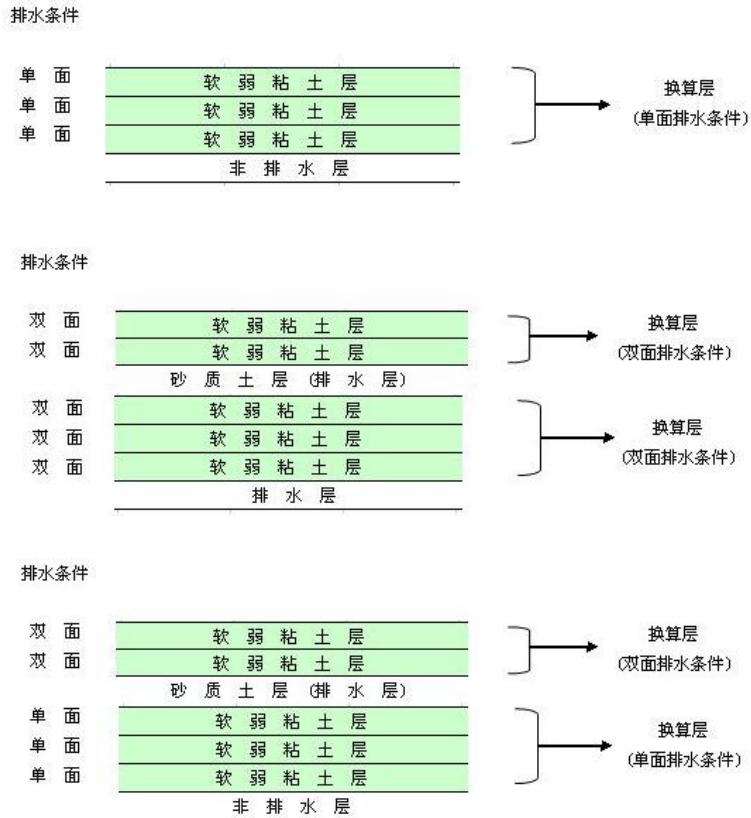


图 2.4.1 多层地基的排水条件以及换算层的构成

在连续的多个软弱粘土层中存在非固结土层时，在计算非固结层的厚度时可选择是否将其考虑进换算层。

如下图所示，排水层位于底部，上部存在一个很薄的非固结层时，将中间的固结层按单面排水处理就不尽合理。此时尽管对于上部很薄的非固结层不计算沉降量，但为了计算沉降时间而确定换算排水距离时，需要把非固结层的厚度考虑进去。很薄的非固结层位于多个软弱黏土层中间时，在计算换算层的厚度时也最好把非固结层考虑进去。



图 2.4.2 计算换算层厚度时考虑非固结层的情形

如下图所示，非固结层的厚度和固结层比较起来相对较厚的时候，计算换算层厚度时则不宜把非固结层的厚度考虑进去。



图 2.4.3 计算换算层厚度时不考虑非固结层的情形

## 2.4.3 排水工法与固结度的关系

### 2.4.3.1 固结度的计算方法

固结排水的理论算式中都考虑了排水设备间距的影响。根据是否考虑竖向排水设备施工过程中对于土的扰动效果(smear effect, 又称为涂抹效果)、是否考虑竖向排水材料对水的渗流速度产生阻力(well resistance, 又称为井阻), 可以选择巴伦(Barron, 1948)、汉斯布(Hansbo, 1981)、Yoshikuni(1979)、Onoue(1988)等计算式。涂抹和井阻都会降低地基固结速度。

可以同时考虑涂抹效果和井阻作用的Hansbo计算公式应用最为广泛。

#### 1) Hansbo(1981)的计算公式

Hansbo为了可以考虑涂抹效果和井阻作用, 对于任意深度的平均固结度提出了如下的计算方法。

$$U_h = 1 - \exp\left(\frac{-8T_h}{F}\right) \quad (2.4.5)$$

$$F = F(n) + F_s + F_r \quad (2.4.6)$$

$$T_h = \frac{C_h \cdot t}{d_e^2} \quad (2.4.7)$$

其中,  $U_h$ : 水平方向的平均固结度,  $T_h$ : 水平方向时间系数,  $F(n)$ : 排水设备间距的影响系数,  $F_s$ : 扰动区域的影响系数,  $F_r$ : 井阻的影响系数,  $C_h$ : 水平方向的固结系数,  $d_e$ : 影响圆的直径。

排水设备间距的影响系数  $F(n)$  计算公式如下。

$$F(n) = \ln(n) - \frac{3}{4} \quad : n \geq 20 \text{ 时} \quad (2.4.8)$$

$$F(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \ln(n) - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \quad : n < 20 \text{ 时} \quad (2.4.9)$$



扰动区域的影响系数  $F_s$  计算公式如下。

$$F_s = \left( \frac{k_h}{k_s} - 1 \right) \cdot \ln \left( \frac{d_s}{d_w} \right) \quad (2.4.10)$$

井阻的影响系数  $F_r$  计算公式如下。

$$F_r = \pi z (2L - z) \frac{k_h}{q_w} \quad (2.4.11)$$

其中,  $n = \frac{d_e}{d_w}$ ,  $d_e$ : 影响圆的直径,  $d_w$ : 竖向排水设备的直径,  $k_h$ : 非扰动粘土地基的水平渗透系数,  $k_s$ : 扰动区域的水平渗透系数,  $d_s$ : 排水井周围的扰动区域的直径 ( $d_s = 2d_m$ ),  $d_m$ : 排水井或者钻孔的直径,  $q_w$ : 排水井的排水能力  $\left( q_w = \frac{k_w \cdot \pi \cdot d_w^2}{4} \right)$ ,  $k_w$ : 竖向排水设备的渗透系数,  $L$ : 排水井的排水长度(单面排水时  $L = H$ , 双面排水时  $L = H/2$ )。

同时考虑竖向固结度和水平方向固结度的整个固结层的平均固结度可按下式计算。

$$U_{vh} = 1 - (1 - U_h)(1 - U_v) \quad (2.4.12)$$

计算基于水平方向排水的固结度时, 对于各土层可以使用等效渗透系数。假设各土层厚度分别为  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , 各层的渗透系数分别为  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 等效的水平渗透系数可以按下式计算。

$$k_h = \frac{1}{h} (k_1 h_1 + k_2 h_2 + \dots + k_n h_n) = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n (k_j h_j) \quad (2.4.13)$$

2) Barron(1948)的计算公式

根据太沙基的固结理论，对于整个固结层的平均固结度，在等应变固结条件下可以按下式计算。

$$U_h = 1 - \exp\left(\frac{-8T_h}{F(n)}\right) \quad (2.4.14)$$

$$F(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \ln(n) - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \quad (2.4.15)$$

其中， $F(n)$ ：排水设备间距的影响系数， $n = \frac{d_e}{d_w}$ ， $d_e$ ：影响圆的直径， $d_w$ ：竖向排水设备的直径。

3) Yoshikuni(1979)的计算式

Yoshikuni对于只考虑井阻影响的平均固结度提出了以下计算方法。

$$U_h = 1 - \exp\left(\frac{-8T_h}{m}\right) \quad (2.4.16)$$

$$m = F(n) + 0.8L \quad (2.4.17)$$

$$F(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \ln(n) - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \quad (2.4.18)$$

$$L = \frac{32}{\pi^2} \cdot \frac{k_h}{k_w} \cdot \left(\frac{H}{d_w}\right)^2 \quad (2.4.19)$$

其中， $L$ ：井阻系数， $H$ ：排水设备的长度(双面排水时使用  $H/2$ )

4) Onoue(1988)的计算公式

Onoue利用Yoshikuni和Nakamodo(1974)提出的可以考虑扰动影响和井阻作用的井阻系数  $L$ ，提出了以下计算公式。

$$U_h = 1 - \exp\left(\frac{-8T_h}{F(n') + 0.8L}\right) \quad (2.4.20)$$

$$F(n') = \frac{(n')^2}{(n')^2 - 1} \cdot \ln(n') - \frac{3(n')^2 - 1}{4(n')^2} \quad (2.4.21)$$

$$L = \frac{32}{\pi^2} \cdot \frac{k_h}{k_w} \cdot \left(\frac{H}{d_w}\right)^2 \quad (2.4.22)$$

其中,  $n' = nS^{\eta-1}$ ,  $\eta = \frac{k_h}{k_s}$ ,  $S = \frac{d_s}{d_w}$ ,  $H$ : 排水设备的长度(双面排水时使用  $H/2$ )

### 2.4.3.2 竖向排水施工的影响

#### 1) 扰动区域(Smear zone)

使用人工钻机贯入时, 土被扰动会使固结系数降低最终导致固结延迟。土发生扰动的区域叫做扰动区域(smear zone), 一般和钻孔的大小及形状、地基的构成及类型、排水设备的贯入方式等因素有关。通过输入适当的理论公式所需的参数, 计算扰动效果对固结延迟的影响程度。

对于扰动区域( $d_s$ )的数值范围和渗透系数的减少率( $k_s/k_h$ ), 不同学者提出了不同的参考值, 具体见下表。

表2.4.1 扰动区域( $d_s$ )的范围

建议人	扰动区域的范围
Jamiolkowski (1985)	$(2.5 \sim 3.0)d$
Hunt (1986)	$(1.3 \sim 1.5)d$
Hansbo (1987)	$2.0d$
Bergado (1991)	$2.0d$

$d$ : 排水井或钻孔的直径

表2.4.2 渗透系数的减少率( $k_v/k_h$ )

建议人	渗透系数减少率
Jamiolkowski (1985)	0.50~0.67
Onoue (1991)	0.20~0.67
Bergado (1991)	0.57

### 2) 井阻

随着固结的进行，竖向排水设备的透水性能开始下降导致固结延迟。**Hansbo**认为不存在长度方向上具有无限大的渗透系数的排水井，即在排水井中存在井阻，如果忽略井阻的影响最终的设计结果可能会导致排水能力不足。因此有必要了解井阻影响因素，从长远考虑降低排水阻碍。

对井阻的主要影响因素如下。

- ✓ 塑料排水板(PBD)的弯曲和折叠
- ✓ 土压力导致的塑料排水板(PBD)过滤设备的徐变
- ✓ 动水力坡降的变化

井阻需要考虑的事项：

- ✓ 孔隙水中永存空气比较多时
- ✓ 相应地层的透水性比较大时
- ✓ 塑料排水板(PBD)的长度比较长的
- ✓ 塑料排水板(PBD)的使用时间比较长时

#### 2.4.3.3 竖向排水井工法

自1930年波特(Porter)提出砂井工法以来，从1940年后期关于竖向排水井工法的理论和施工技术都得到了快速的发展。谢尔曼(Kjellman)等在1936年提出了一种叫卡纸板(Card Board)的纸板排水工法，1978年日本提出了将小直径砂井布置成网状的袋装砂井(Pack Drain)工法。

竖向排水工法是指通过较密地设置柱状透水层来减少粘性土层的排水距离，从而促进固结沉降的进行，尽快使地基稳定的方法。具有代表性的工法有砂井(SD)、袋装砂井(Pack)、纸板排水井、挤密砂桩(SCP)、挤密碎石桩(GCP)、圆柱排水(CD, Cylindrical Drain)等，其原理都相同。

### 1) 砂井(Sand Drain)工法

砂井是指在土中竖直设置砂柱使孔隙水得到排出，从而减少排水距离最终加速固结的工法。软弱地基上存在堆土等荷载时，荷载导致地基内产生超孔隙水压，与排水层的水头差引起排水，最终发生固结现象。如果软弱地基非常厚，而且其间没有排水层的话，渗水路径就会变长，因此需要在地基中设置砂柱以减少排水距离来加速固结。

### 2) 圆柱排水(Cylindrical Drain)和纸板排水(Paper Drain)工法

圆柱排水工法(纸板排水工法)的原理是在软弱粘性土地基上贯入排水性能很好的排水板，以使地基内的孔隙水能沿其排出到地表从而加速固结沉降的工法。

### 3) 袋装砂井(Pack Drain)工法

砂井工法的缺点是砂柱有可能在地基中被切断，从而影响排水效果。袋装砂井对砂井工法进行了改善，使用了聚乙烯网架在其中填满沙子后将其贯入地基中，从而达到排水和缩短固结时间的目的。由于设备原因，袋装砂井的布置方式与砂井工法不同，砂井工法是按等间距布置的，而袋装砂井如图2.4.4所示不是按等间距布置的。袋装砂井按照每个排水井承担的排水面积(影响范围)计算整体的平均固结度。

按四边形布置排水井时，等效影响圆的直径计算公式如下。

$$d_{e1} = 1.128 \cdot L_1 ; \quad d_{e2} = 1.128 \sqrt{L_1 \cdot L_2} ; \quad d_{e3} = 1.128 \cdot L_2 \quad (2.4.23)$$

时间系数  $T_h$  计算公式如下。

$$T_{h1} = \frac{C_h \cdot t}{d_{e1}^2} ; \quad T_{h2} = \frac{C_h \cdot t}{d_{e2}^2} ; \quad T_{h3} = \frac{C_h \cdot t}{d_{e3}^2} \quad (2.4.24)$$

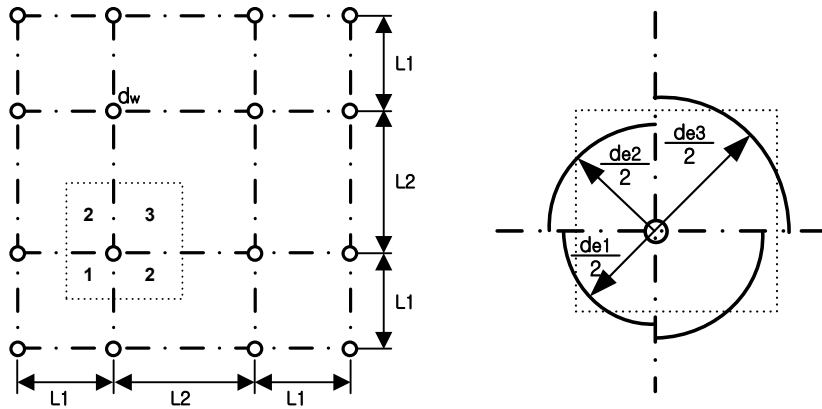


图 2.4.4 袋装砂井的布置间距

被分割的各区域的间距比( $n$ )如下。

$$n_1 = \frac{d_{e1}}{d_w} ; \quad n_2 = \frac{d_{e2}}{d_w} ; \quad n_3 = \frac{d_{e3}}{d_w} \quad (2.4.25)$$

平均固结度计算公式如下。

$$U = \frac{A_1 U_1 + 2A_2 U_2 + A_3 U_3}{A_1 + 2A_2 + A_3} \quad (2.4.26)$$

#### 4) 挤密砂桩或挤密碎石桩工法

挤密砂(石)桩工法是在软弱地基中通过振动将砂子或石砾压入土中形成砂桩或石桩的工法。该工法可以增加地基的密度、提高地基承载力并可减少固结沉降量、还可以提高水平承载力、促进地基均匀化、并增加固结的排水效果。这种工法可以适用于松散的砂质土层、粘性土、以及有机土层等几乎所有的土质。

置换率( $a_s$ )是指原始地基为1时, 置换的沙子(石砾)桩所占据的体积比, 是体现改良程度的参数。一般对于沙土或陆地粘性土的改良取0.3以下, 对于海土取0.3~0.8之间。

$$\text{正三角形排列置换率}(b): a_s = \frac{A_s}{A} = \frac{A_s}{d^2}$$

$$\text{正方形排列置换率}(c): a_s = \frac{A_s}{A} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{A_s}{d^2}$$

其中， $A_s$ ：砂(石)桩的截面面积， $A$ ：砂(石)桩的截面面积+粘性土的截面面积。

对于砂土地基，改良后的强度增加效果不是很明确，但是对于粘性土地基，这种复合地基的改良效果还是很明显的。粘性土和砂(石)桩形成的复合地基在承受上部结构的荷载时，因为两种材料的物理、力学特性不同，所承担的荷载以及应力也有所不同，一般认为主要是由砂(石)桩承担荷载。也因为粘性土所承受的荷载以及应力显著减少，从而增加了地基的承载力、减少了地基沉降量。

如下图所示，如果复合地基的平均应力为 $\sigma$ ，桩的应力为 $\sigma_s$ ，粘性土的应力为 $\sigma_c$ ，在各自的面积 $A_s$ 、 $A_c$ 内应力是均匀的话，则可以得到下式。

$$\sigma \cdot A = \sigma_s \cdot A_s + \sigma_c \cdot A_c \quad (2.4.27)$$

利用应力分担比( $n = \sigma_s / \sigma_c$ )将上式变换可得，

$$\sigma \cdot A = n \cdot \sigma_c \cdot A_s + \sigma_c \cdot A_c = \sigma_c (n \cdot A_s + A_c) \quad (2.4.28)$$

桩和粘性土的应力比如下。

$$\mu_s = \frac{\sigma_s}{\sigma} = \frac{n \cdot A}{n \cdot A_s + A_c} = \frac{n}{1 + (n-1)a_s} \quad (2.4.29)$$

$$\mu_c = \frac{\sigma_c}{\sigma} = \frac{A}{n \cdot A_s + A_c} = \frac{1}{1 + (n-1)a_s} \quad (2.4.30)$$

其中， $\mu_s$ ：桩的应力集中系数， $\mu_c$ ：粘性土的应力折减系数， $a_s$ ：沙子(石砾)的置换率( $a_s = A_s / A$ )

从上式中可以得到，

$$\mu_s \cdot a_s + \mu_c (1 - a_s) = 1 \quad (2.4.31)$$

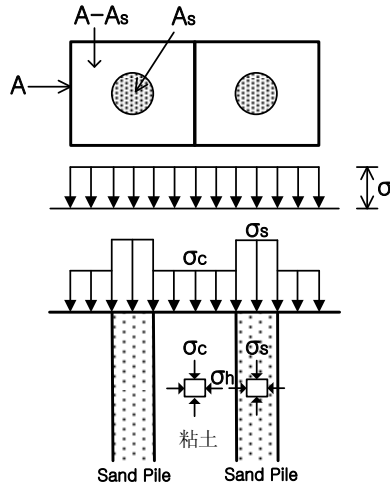


图 2.4.5 挤密砂桩的应力分布

实际工程中使用的应力分担比( $n$ )可按照置换率( $a_s$ )可以按下表考虑。如果在现场测定地应力并得到  $n$  时，可以根据上式计算  $\mu_s$  和  $\mu_c$ 。

表2.4.3 应力分担比( $n$ )

置换率( $a_s$ )	沙(石)的内摩擦角( $\phi_s$ )	应力分担比( $n$ )
0 ~ 0.4	30	3
0.4 ~ 0.7	30	2
0.7以上	30 ~ 35	1



一般竖向排水工法中，等效影响圆的直径可按图2.4.6所示计算。

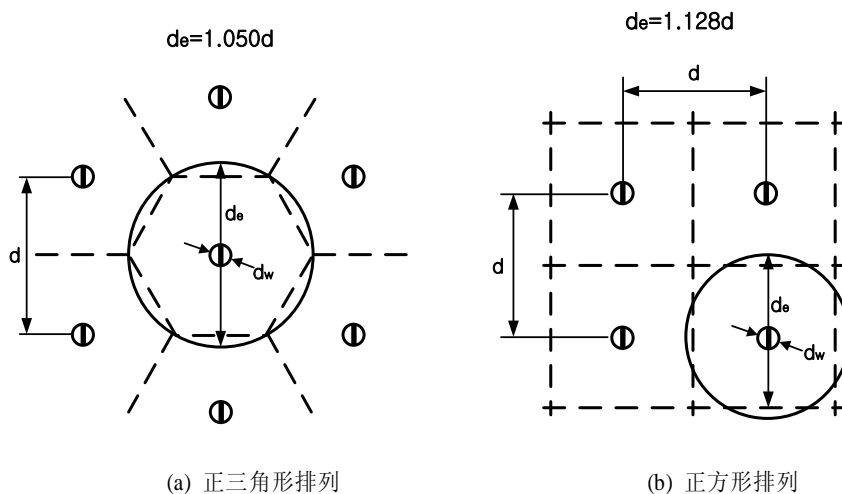


图 2.4.6 挤密砂桩的等效影响圆直径

#### 2.4.3.4 复合地基的固结计算方法

复合地基的固结计算与砂桩没有太大差别，但设计方法有所不同。沉降可以在现场施工中测量，即使根据经验也能够大致定量地预估。一般认为复合地基的沉降量是未处理地基沉降量的 $1/3 \sim 2/3$ 。复合地基的沉降量主要取决于粘性土承受的竖向应力。

计算固结度的时候，一般把砂桩看作是竖向排水井。因为竖向荷载主要由砂桩承受，粘性土承受的竖向应力大大减少了，因此沉降量也会减少。一般置换率( $a_s$ )越大，沉降量会越小。

这里介绍Aboshi et. Al(1979)和Barksdae(1981)等提出的使用平衡法计算复合地基的沉降量的方法，这个方法的假设如下。

- 等效有效圆柱的概念对于整个地基都适用；
- 等效有效圆柱上作用的荷载与粘土和砂桩产生的应力总和相同(保持平衡状态)；

- 砂桩和粘土的沉降量相同；
- 荷载作用下砂桩产生的应力在砂桩整个长度上都相同，当将压缩地层分割为几个单元时，各单元内的应力在长度方向上相同。

$C_c$  法中最终的固结沉降量计算公式如下。

$$S_f = \frac{C_c}{1+e_0} \cdot H \cdot \log_{10} \left( \frac{\sigma_0 + \mu_c \sigma}{\sigma_0} \right) \quad (2.4.32)$$

未处理地基的沉降量和复合地基的沉降量的比可按式计算。

$$\beta = \frac{S_f}{S} = \frac{\log_{10} \left( \frac{\sigma_0 + \mu_c \sigma}{\sigma_0} \right)}{\log_{10} \left( \frac{\sigma_0 + \sigma}{\sigma_0} \right)} \quad (2.4.33)$$

其中， $\sigma_0$ ：初始有效荷载引起的应力， $\sigma$ ：附加荷载引起的应力。

有效应力  $\sigma_0$  非常大(砂桩较长时)而附加荷载应力  $\sigma$  比较小时， $\beta = \frac{S_f}{S}$  的比将接近  $\mu_c$  值。从而可得：

$$\beta = \frac{S_f}{S} \approx \mu_c = \frac{1}{1+(n-1)a_s} \quad (2.4.34)$$

## 2.5 堆土荷载引起的地基强度增量

### 2.5.1 一般计算公式

粘土地基由于堆土产生的强度增加率( $m$ )可以用自然状态下的不排水强度 $C_u$ 与施加的土压力 $P_0$ 的比来表示,由此加载引起的强度增量如下。

$$C = C_0 + m(P_0 + \Delta P - P_c)U \quad (2.5.1)$$

其中,  $C$ : 粘结力,  $C_0$ : 初始粘结力,  $\Delta P$ : 荷载增量,  $m$ : 强度增加率,  $U$ : 固结度,  $P_0$ : 有效初始荷载,  $P_c$ : 先期固结荷载

### 2.5.2 挤密砂桩(碎石桩)工法的地基强度增量

使用挤密砂桩或者挤密碎石桩来处理地基时,地基的强度增加可以使用以下方法计算。

$$\phi = \tan^{-1}(m \cdot \tan \phi_s) \quad (2.5.2)$$

$$C = (1 - a_s)[C_0 + m(P_0 - P_c + \mu_c \cdot \sigma)U] \quad (2.5.3)$$

$m$ : 强度增加率,  $\phi_s$ : 沙子或者石砾的内部摩擦角,  $\mu_s$ : 桩的应力增加系数

$\left( \mu_s = \frac{\sigma_s}{\sigma} = \frac{n}{1 + (n-1)a_s} \right)$ ,  $\mu_c$ : 粘土的应力折减系数  $\left( \mu_c = \frac{\sigma_c}{\sigma} = \frac{1}{1 + (n-1)a_s} \right)$ ,  $\sigma_s$ : 沙石承担的应力,  $\sigma_c$ : 粘土承担的应力,  $\sigma$ : 施加堆土荷载引起的增加的应力,  $a_s$ : 沙石的置换率 ( $A_s/A$ ),  $n$ : 应力分担比

## 2.6 各阶段随时间变化的沉降量

### 2.6.1 概要

施加堆土荷载和外部荷载时，需要考虑加载时间和间歇期时间进行分阶段加载。多阶段加载时，前一个阶段荷载引起的固结还没有结束后一个阶段的荷载加载又会引起新的固结。即，最终的荷载-沉降曲线是两个阶段荷载引起的沉降综合形成的。

在实际施工中，一般不会一次性加载，而是逐渐加载最终达到目标荷载。堆土荷载的加载时间或结构施工工期比起固结所需时间很短时，可以近似地看作是瞬间加载，忽视加载过程中发生的固结，否则需要考虑分阶段加载来计算固结。

在SoilWorks中，计算施工阶段的时间-沉降量时，提供各阶段总荷载法和各阶段独立荷载法两种方法。

### 2.6.2 各阶段总荷载法

各阶段总荷载法是在各阶段使用累加到该阶段的总荷载重新计算随时间变化的各阶段沉降量和总沉降量的方法，计算时使用的地基条件是初始地基状态。举例来说，在第一阶段计算出沉降曲线，在第二阶段针对原初始地基状态用累计（包含第一阶段的荷载）荷载也计算出沉降曲线，然后将第二阶段的沉降曲线平行移动，移动到使第二阶段开始时刻的沉降量与第一阶段结束时刻的沉降量相同，将第一阶段的曲线和移动后的曲线连接起来作为最终的沉降曲线（如下图所示）。

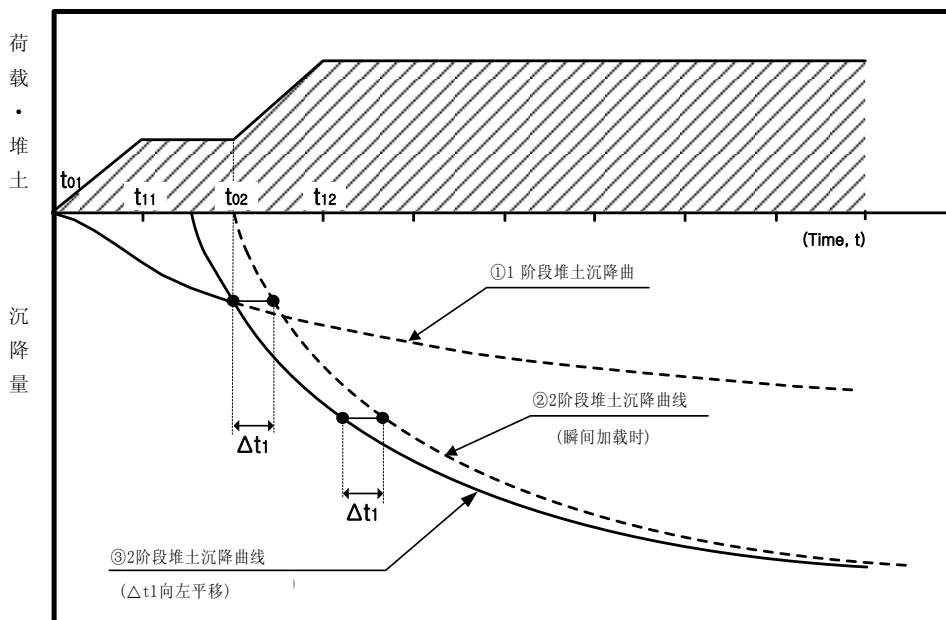


图 2.6.1 加载沉降曲线的平行移动

### 2.6.2.1 各加载阶段沉降曲线

#### 1) 未做排水处理时的沉降曲线

$$t_{0m} < t < t_{1m} \text{ (加载时间)}$$

未做排水处理时，体现加载时间的时间系数  $T_{vr}$  按下式计算。

$$T_{vr} = \frac{C_v \left[ \frac{(t - t_{0m})}{2} + \Delta t_1 \right]}{H_0^2} \quad (2.6.1)$$

其中， $C_v$ ：固结系数， $H_0$ ：原始地基的固结层厚度， $t$ ：时间(天)， $t_{0m}$ ： $m$  阶段开始加载时

间（天）， $\Delta t_1$ ：平移时间

$m$  阶段堆土加载时的固结度  $U_m$  按下式计算。

$$U_m = \sqrt{\frac{4T_{vt}}{\pi}} \quad : \quad U_m \leq 53\% \text{ 时} \quad (2.6.2)$$

$$U_m = 1 - \frac{10^{\frac{1.781 - T_{vt}}{0.933}}}{100} \quad : \quad U_m > 53\% \text{ 时} \quad (2.6.3)$$

$m$  阶段堆土时平行移动时间  $\Delta t_1$  按下式计算。

$$\Delta t_1 = \frac{H_0^2 \pi U^2}{4C_v} \quad : \quad U \leq 53\% \text{ 时} \quad (2.6.4)$$

$$\Delta t_1 = \frac{H_0^2 [1.781 - 0.933 \times \log(100 - 100U)]}{C_v} \quad : \quad U > 53\% \text{ 时} \quad (2.6.5)$$

其中， $U = S_{(r0m)(m-1)} / S_f$ ， $S_{(r0m)(m-1)}$  为  $(m-1)$  阶段施加荷载结束  $m$  阶段加载开始时发生的沉降量， $S_f$  为  $m$  阶段加载时的最终沉降量。

因此， $m$  阶段堆土加载阶段发生的固结沉降量  $S_{tm}$  可计算如下。

$$S_{tm} = \left( S_f U_m - S_{(r0m)(m-1)} \right) \left( \frac{t - t_{0m}}{t_{1m} - t_{0m}} \right) + S_{(r0m)(m-1)} \quad (2.6.6)$$

其中， $t_{0m}$ ： $m$  阶段堆土加载的开始时间， $t_{1m}$ ： $m$  阶段堆土加载结束时间

$$t_{1m} < t \quad (\text{间歇期时间})$$

时间系数  $T_{vr}$  可表达如下。

$$T_{vr} = \frac{C_v \left[ t - \frac{(t_{0m} + t_{1m})}{2} + \Delta t_1 \right]}{H_0^2} \quad (2.6.7)$$

固结度  $U_m$  如式(2.6.2)、(2.6.3)所示。平行移动时间  $\Delta t_1$  如式(2.6.4)、(2.6.5)所示。 $m$  阶段堆土加载后间歇期阶段的固结沉降量  $S_{tm}$  如下式所示。

$$S_{tm} = S_f U_m \quad (2.6.8)$$

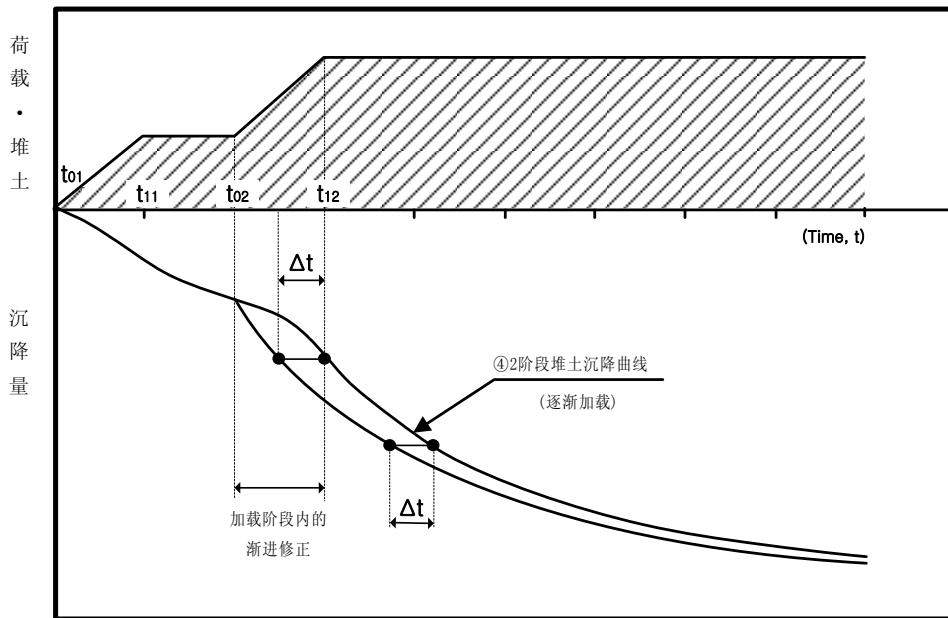


图 2.6.2 各阶段加载沉降曲线的修正

如图2.6.1所示，把两个阶段的堆土考虑为瞬间加载时，可将第二阶段的沉降曲线②从  $t_{02}$  的时间点向左平移  $\Delta t_1$  使其与相应的第一阶段的沉降曲线相交，从而得到最终的沉降曲线③。另

外，如图2.6.2所示，如果考虑第2阶段加载过程，通过渐进修正可得到沉降曲线④。此时，渐进修正通过平移  $\Delta t$  来实现的，而  $\Delta t$  是通过反复迭代得到的值。

2) 做排水处理时的沉降曲线

$t_{0m} < t < t_{1m}$  (加载时间)

排水处理时的时间系数  $T_{ht}$  按下式计算。

$$T_{ht} = \frac{C_h \left[ \frac{(t - t_{0m})}{2} + \Delta t_1 \right]}{d_e^2} \quad (2.6.9)$$

其中， $C_h$ ：水平方向的固结系数， $d_e$ ：影响圆的直径

固结度  $U_m$  的计算方法有以下这些类型(参考2.4.3节)。

$$U = 1 - \exp\left(\frac{-8T_h}{F(n)}\right) \quad : \text{Barron法} \quad (2.6.10)$$

$$U = 1 - \exp\left(\frac{-8T_h}{F}\right) \quad : \text{Hansbo法} \quad (2.6.11)$$

$$U = 1 - \exp\left(\frac{-8T_h}{m}\right) \quad : \text{Yoshikuni法} \quad (2.6.12)$$

$$U = 1 - \exp\left(\frac{-8T_h}{F(n') + 0.8L}\right) \quad : \text{Onoue法} \quad (2.6.13)$$

$m$  阶段堆土时的平行移动时间  $\Delta t_1$  按下式计算。

$$\Delta t_1 = \frac{d_e^2 \pi U^2}{4C_h} \quad : \quad U \leq 53\% \text{ 时}, \quad (2.6.14)$$

$$\Delta t_1 = \frac{d_e^2 [1.781 - 0.933 \times \log(100 - 100U)]}{C_h} \quad : \quad U > 53\% \text{ 时}, \quad (2.6.15)$$



其中， $U = S_{(t_{0m})/(m-1)} / S_f$ ， $S_{(t_{0m})/(m-1)}$ 为 $(m-1)$ 阶段施加荷载结束 $m$ 阶段加载开始时发生的沉降量， $S_f$ 为 $m$ 阶段加载时的最终沉降量。

因此， $m$ 阶段堆土加载阶段发生的固结沉降量 $S_{t,m}$ 同样可按式(2.6.6)计算。

时间系数 $T_{ht}$ 可表达如下。

$$T_{ht} = \frac{C_h \left[ t - \frac{(t_{0m} + t_{1m})}{2} + \Delta t_1 \right]}{d_e^2} \quad (2.6.16)$$

$m$ 阶段堆土加载后间歇期阶段的固结沉降量 $S_{t,m}$ 可按式(2.6.8)计算。

### 2.6.2.2 卸载阶段的沉降曲线

堆土或外部荷载发生卸载时，粘性土会发生回弹，具体计算方法参见2.2.3节。如图2.6.3所示，第一阶段、第二阶段以及第四阶段为加载阶段，第三阶段为卸载阶段（把第二阶段加载的荷载卸除），图中显示的是加载、卸载过程的沉降曲线。

对于卸载阶段，如果考虑回弹的第三阶段沉降曲线在 $t_{03}$ 时间点的沉降量(A点)，比第一阶段沉降曲线中的最终沉降量小时，按图2.6.3所示将第一阶段的沉降曲线向左平移 $\Delta t$ 来绘制沉降曲线。

如图2.6.4所示，考虑回弹的第三阶段沉降曲线在 $t_{03}$ 时间点的沉降量(A点)，比第一阶段沉降曲线中的最终沉降量大时，则第三阶段沉降量可使用恒定的沉降量。

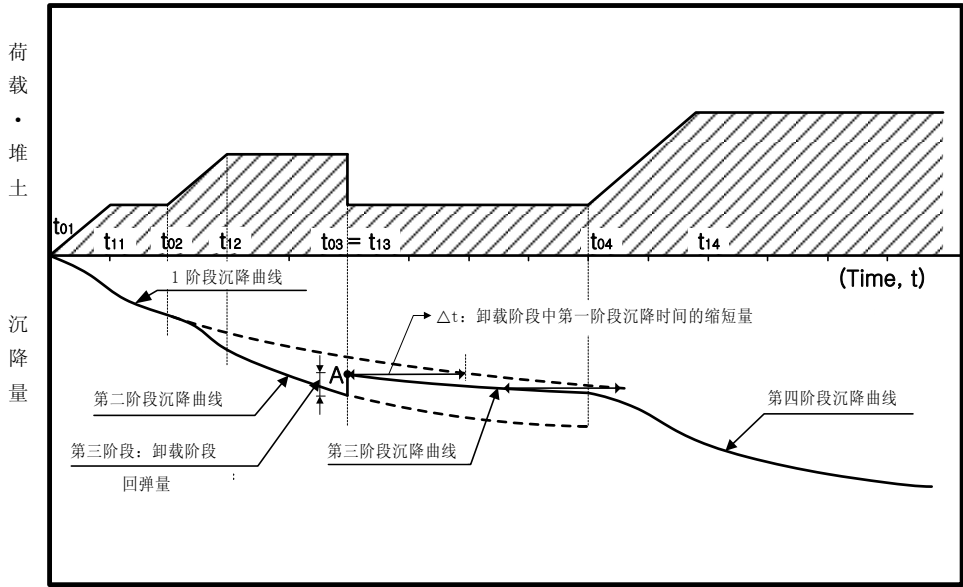


图 2.6.3 卸载阶段沉降曲线的平移

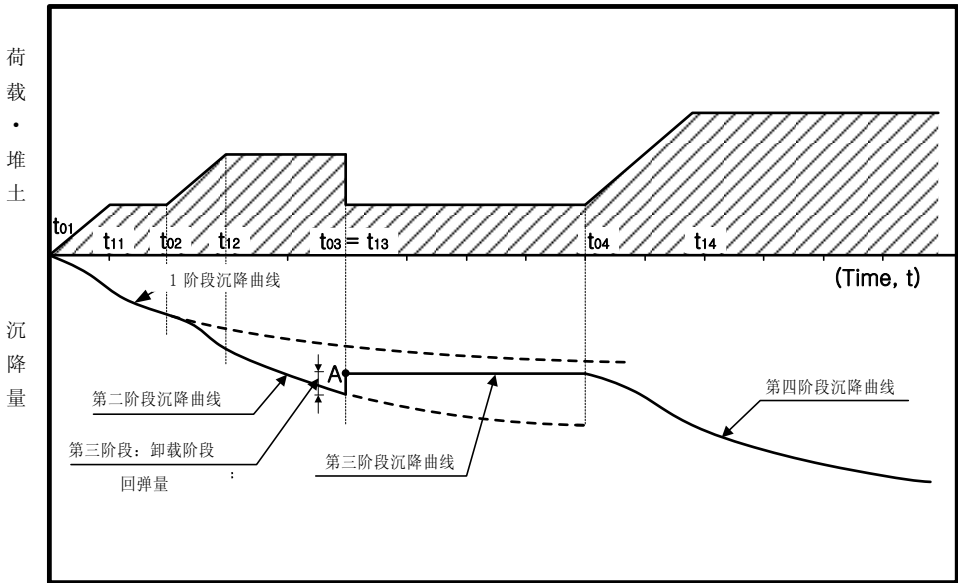


图 2.6.4 卸载阶段保持恒定的沉降量

### 2.6.3 各阶段独立荷载法

独立荷载法是对各阶段增加的荷载按计算沉降量，并最终累积起来绘制沉降曲线的方法。此时各阶段的地基条件是随着时间而变化的，即第一阶段加载时按原始地基条件来考虑计算沉降，第二阶段加载时初始的地基条件考虑了地基的有效应力的变化和沉降导致的地层厚度的变化，最终将各阶段的沉降曲线累积起来得到最终的沉降曲线。

下图所示的是将第二阶段的沉降曲线累加到第一阶段沉降曲线的过程。

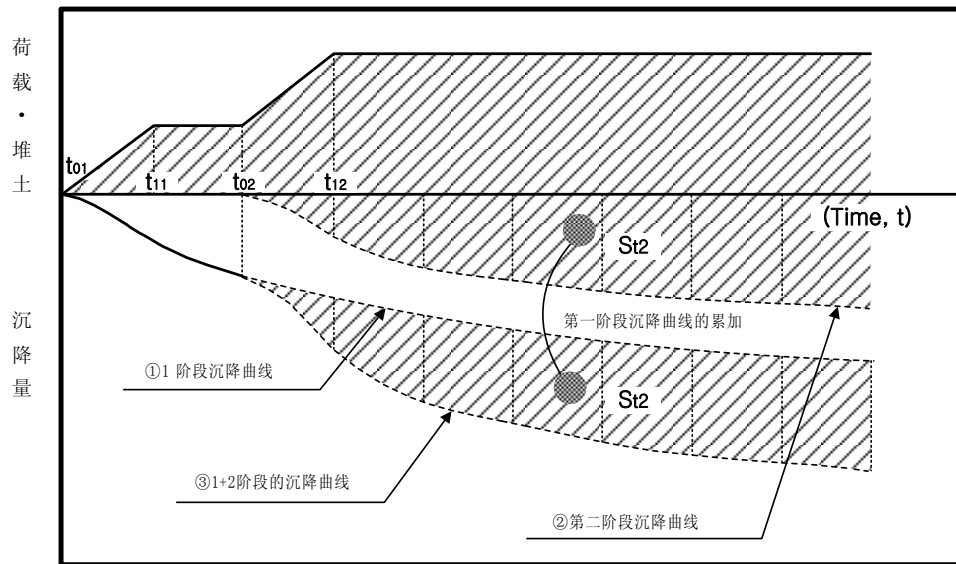


图 2.6.5 独立荷载法中各阶段沉降曲线的累加

下图中第一阶段~第三阶段为分阶段加载阶段、第四阶段为卸载阶段。对于(1+2+3)阶段的沉降曲线可以按上面介绍的方法累加后绘制。第四阶段卸载时会发生瞬间回弹，第四阶段的卸载效应的沉降量将是恒定的。因此，第四阶段沉降曲线为(1+2+3+4)累加的曲线。

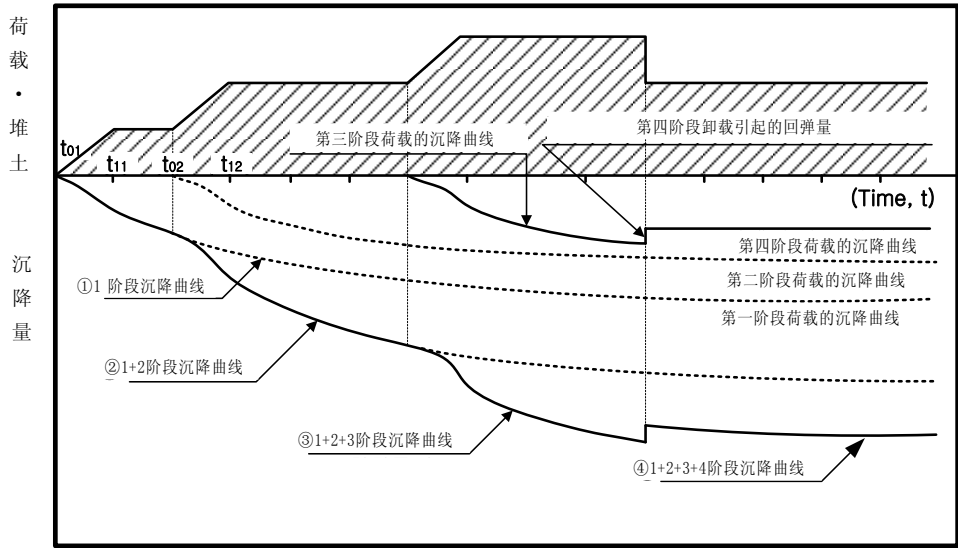


图 2.6.6 独立荷载法中体现卸载阶段的沉降曲线

## 第5部分

---

# 基础分析

### 基础分析

- 第1章 水平荷载作用下的地基响应曲线
- 第2章 竖向荷载作用下的地基响应曲线
- 第3章 水平荷载作用下的群桩效应



## 基础分析

### ○ 基础分析 / 001

#### ○ 第1章 水平荷载作用下的地基响应曲线 / 003

- 1.1 自由水面条件下的软弱粘性土 / 005
- 1.2 自由水面条件下的坚硬粘性土 / 008
- 1.3 没有自由水面影响的坚硬的粘性土 / 014
- 1.4 地下水面条件下的砂质土 / 017
- 1.5 砂质土的地基响应曲线(API RP2A) / 023
- 1.6  $c-\phi$ 土的地基响应曲线 / 026
- 1.7 岩石地基的地基响应曲线 / 031
  - 1.7.1 硬岩的地基响应曲线 / 031
  - 1.7.2 软岩的地基响应曲线 / 032

#### ○ 第2章 竖向荷载作用下的地基响应曲线 / 035

- 2.1 概要 / 035
- 2.2 粘性土中桩摩阻力的荷载传递函数 / 037
- 2.3 粘性土中桩端反力的荷载传递函数 / 038
- 2.4 砂质土中桩摩阻力的荷载传递函数 / 040
- 2.5 粘性土中桩端反力的荷载传递函数 / 042

#### ○ 第3章 水平荷载作用下的群桩效应 / 043

- 3.1 概要 / 043
- 3.2 桩横向间距对折减系数的影响 / 054

3.3 桩纵向间距对折减系数的影响 / 046

3.4 桩斜向间距对折减系数的影响 / 048





# 基础分析

过去主要针对竖向荷载进行基础分析和验算，但是最近关于风荷载、波浪荷载、地震荷载对基础和地基的影响正成为新的热门研究课题。为此需要建立能准确反映地基的非线性特性的分析模型。里斯(Reese)和卡特洛克(Matlock)等人对不同类型的土进行了水平加载试验，并给出了桩水平变形与地基水平反力的关系曲线。水平荷载作用在桩头时，虽然荷载很小，但是当地基较弱时地基很容易超过弹性极限，此时如果不使用土的非线性特性就不能真实地反映地基的受力状态。

在SoilWorks的基础分析中使用的单元、荷载和边界条件如下表所示。关于单元、荷载和边界条件的说明详见隧道分析手册(用户手册的第2部分)。

表1 基础分析中使用的单元、荷载及边界条件

区分	单元、荷载及边界条件	具体使用内容
单元	岩土单元	非线性点弹簧单元
	桩单元	梁单元
	基础单元	刚性连接单元
荷载	基础上端的荷载	节点荷载
边界	上端边界	释放梁端约束
	下端边界	约束边界

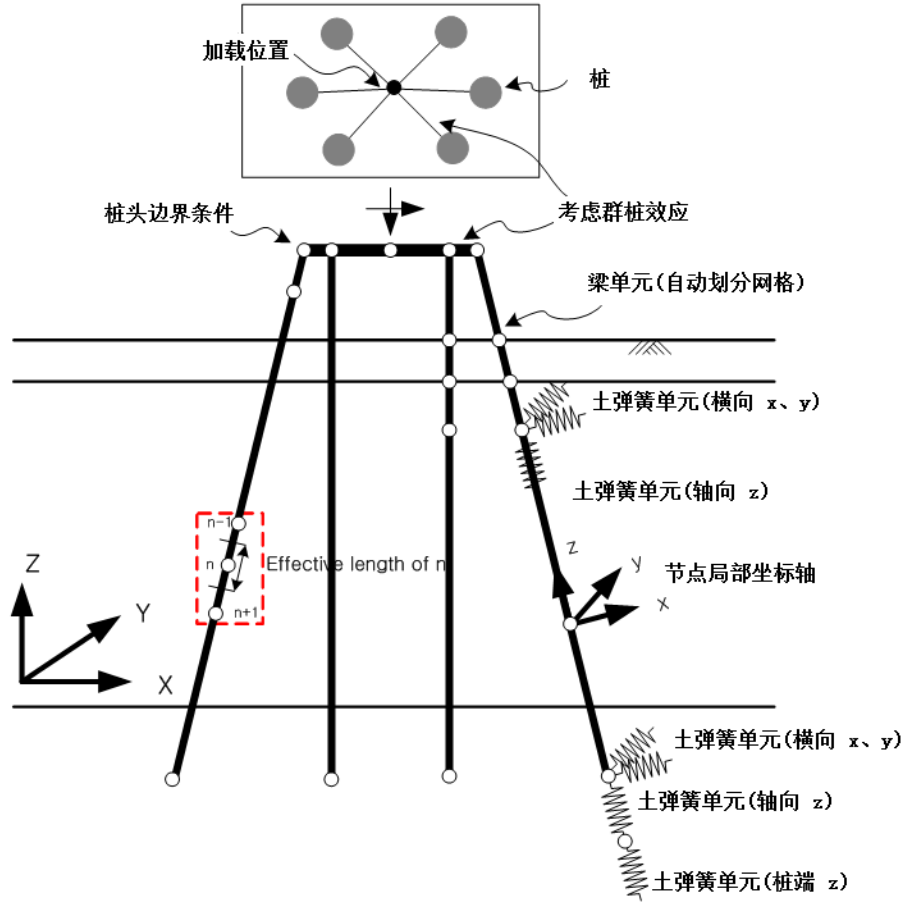


图 1 基础分析模型示意图



# 水平荷载作用下的地基响应曲线

桩受水力力作用时,地基水平反力( $P$ )和水平位移( $y$ )之间的关系显示出非线性特性。图 1.1 为里斯 (Reese, 1983) 提出的地基响应曲线示意图。施工后桩在深度  $x_1$  的平面上各方向应力相同, 当桩发生了水平方向位移时, 桩受力一侧的应力增加, 而另一侧应力减少。

如果地基水平反力( $P$ )可以用深度( $x$ )和桩的水平位移( $y$ )的函数表示, 则可以利用该函数(地基响应曲线)进行桩基分析, 即计算出各深度的地基极限水平反力( $P_u$ )就可以近似的验算桩基的安全性。

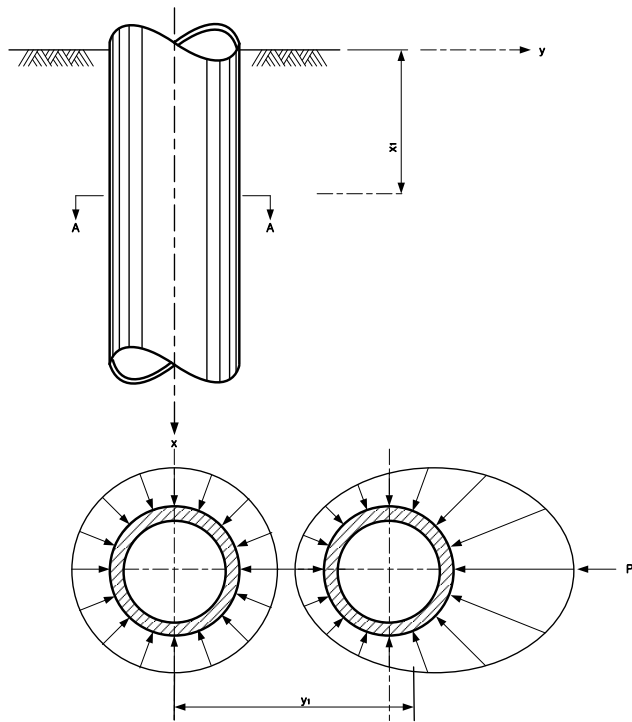


图 1.1 地基响应曲线的定义

如图1.2所示，图中虚线的斜率表示地基的变形刚度，随着变形增加其斜率变小(加载2位置的斜率小于加载1位置的斜率)，表示地基刚度(变形模量 $E_s$ )在变小。另外，因为沿深度方向土的抗剪强度是逐渐增加的，所以表示沿深度方向地基变形模量是逐渐增加的。

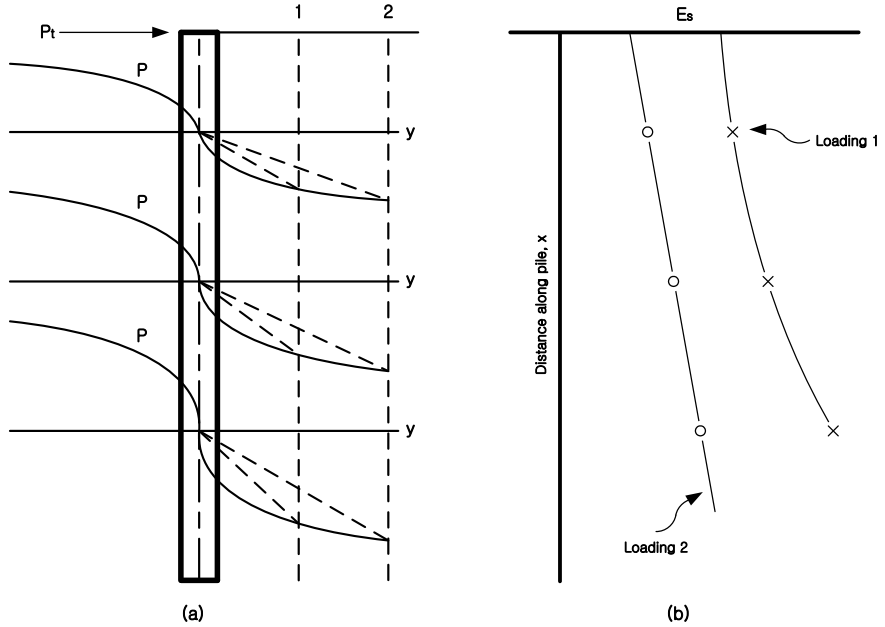


图 1.2 各深度的地基响应曲线(p-y 曲线)

因为斜率随水平位移发生变化，因此p-y曲线应反映地基的非线性特性才能用于分析中。影响p-y曲线的主要因素有地基类型、桩类型以及荷载类型。

## 1.1 自由水面条件下的软弱粘性土

马特洛克(Matlock, 1970)对直径  $12.75\text{ft}$ 、长度  $42\text{ft}$  的钢管桩在土的抗剪强度为  $800\text{lb}/\text{ft}^2$  的Lake Austin地区和平均抗剪强度为  $300\text{lb}/\text{ft}^2$  的Sabine Pass, Texas地区进行了现场水平加载试验, 基于试验数据提出了软弱粘性土地基的p-y曲线。

下面图形为短期静荷载和往复荷载作用下的软弱粘性土的地基响应曲线。往复加载试验时发现地下水对地基响应有很大影响。

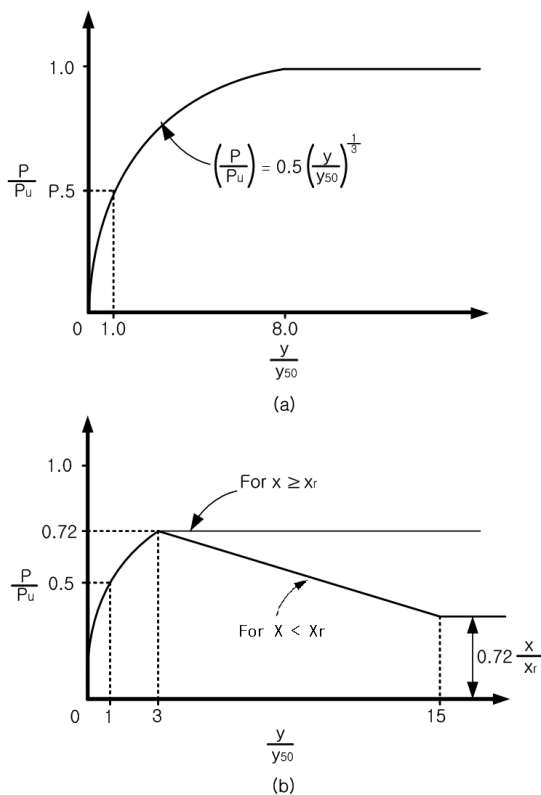


图 1.1.1 自由水面以下的软弱粘土的地基响应曲线

静荷载作用下软弱粘性土地基响应曲线制作步骤如下(参见图1.1.1(a))。

- ① 测量地基沿深度方向的不排水抗剪强度( $c_u$ )和饱和容重( $\gamma$ )。然后计算相当于50%最大偏差应力对于的应变  $\varepsilon_{50}$ 。如果没有应力-应变曲线,可参照下表确定  $\varepsilon_{50}$ 。

表1.1.1 粘性土的应变

粘性土状态	$\varepsilon_{50}$
软	0.020
中	0.010
硬	0.005

- ② 计算桩单位长度上地基的极限反力  $p_u$ , 取下面公式计算结果中的较小值。

$$p_u = \left( 3 + \frac{\gamma'}{c} x + \frac{J}{b} x \right) cb \quad (1.1.1)$$

$$p_u = 9cb \quad (1.1.2)$$

其中,  $\gamma'$  为由地表面到计算位置的平均有效单位重量,  $x$  为由地表到计算位置的深度,  $c$  为深度  $x$  处的抗剪刚度,  $b$  为桩截面的宽度。  $J$  为马特洛克(Matlock, 1970)提出的系数, 马特洛克对于软粘性土建议使用0.5、中粘性土建议使用0.25。但是分析中  $J$  一般取0.5, 在Soilworks中使用了0.5。

- ③ 使用下面公式计算相当于50%极限地基反力对应的位移  $y_{50}$ 。

$$y_{50} = 2.5\varepsilon_{50}b \quad (1.1.3)$$

- ④ 使用下面公式绘制p-y曲线。

$$\frac{p}{p_u} = 0.5 \left( \frac{y}{y_{50}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.1.4)$$

- ⑤ 如上图所示, 当  $y \geq 8y_{50}$  时取  $p = p_u$ 。

往复荷载作用下的地基响应曲线制作步骤如下(参见图1.1.1(b))。

- ①  $p \leq 0.72p_u$  时采用与静荷载相同的方法确定p-y曲线。
- ② 解公式(1.1.1)和(1.1.2)组成的方程组, 可得两个公式的  $p_u$  相同时的转换支承点(节点)深度  $x_r$ , 如果抗剪强度和单位重量不变时, 转换点深度计算公式如下。如果土的抗剪强度和单位重量沿深度是变化的, 应考虑地基的材料特性计算转换点深度  $x_r$ 。

$$x_r = \frac{6cb}{(\gamma' b + Jc)} \quad (1.1.5)$$

- ③ 如果p-y曲线的计算点位置  $x$  大于转换点深度  $x_r$  时,  $y \geq 3y_{50}$  时取  $p = 0.72p_u$ 。
- ④ 如果p-y曲线的计算点位置  $x$  小于交点  $x_r$  时, 在  $y = 3y_{50}$  处取  $p = 0.72p_u$ , 随着位移增加地基反力将减小, 在  $y \geq 15y_{50}$  时,  $p$  取下面固定值。两点之间为直线连接。

$$p = 0.72p_u \left( \frac{x}{x_r} \right) \quad (1.1.6)$$

#### 推荐的土力学试验:

为了确定p-y曲线所需的地基的抗剪强度, 马特洛克(Matlock, 1970)推荐了下面几种试验方法。

- ① 以土壤分类为目的的取样和现场十字板剪切试验
- ② 采用与上部荷载相同的侧限压力的非固结不排水三轴试验
- ③ 取样进行小型十字板试验
- ④ 非约束状态下压缩试验

确定土体的单位重量也需要进行上述试验。

## 1.2 自由水面条件下的坚硬粘性土

里斯、考克斯和库普(Reese, Cox & Koop(1975))对直径为  $24in$ 、长度为  $50ft$  的钢管桩在坚硬的粘土地上进行了水平加载试验。从地表到  $12ft$  深度的粘性土的不排水抗剪强度为  $1ton / ft^2$  到  $3ton / ft^2$  逐渐增加。

下图为静荷载作用下的试验结果。在同一现场也进行了往复加载试验，发现往复荷载作用下的地基反力比起静荷载作用下的结果小很多。Long和Reese(1983)没有说明往复荷载作用下反力减小的原因，只是提到了通过荷载试验得到的p-y曲线是非常保守的。

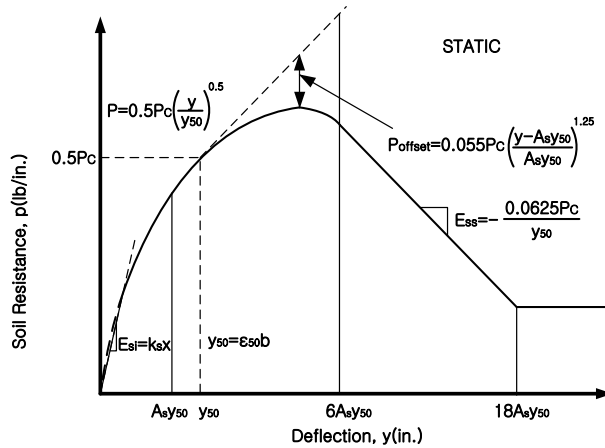


图 1.2.1 自由水面条件下的坚硬粘土在水平静荷载作用下的地基响应曲线

静荷载作用下坚硬粘土的地基响应曲线的制作步骤如下(参见图1.2.1)。

- ① 测量相应支承点位置的不排水剪切强度( $c_u$ )、饱和容重( $\gamma'$ )和桩的直径( $b$ )。
- ② 计算到深度  $x$  的平均非排水抗剪强度  $c_a$ 。
- ③ 计算桩单位长度上地基的极限反力  $p_c$ ，可取下面公式计算结果中的较小值。

$$p_{ca} = 2c_a b + \gamma' b x + 2.83c_a x \quad (1.2.1)$$

$$p_{cd} = 11cb \quad (1.2.2)$$



- ④ 利用下图计算无量纲深度系数  $A_s$  ( $A_s = \frac{x}{b}$ )。

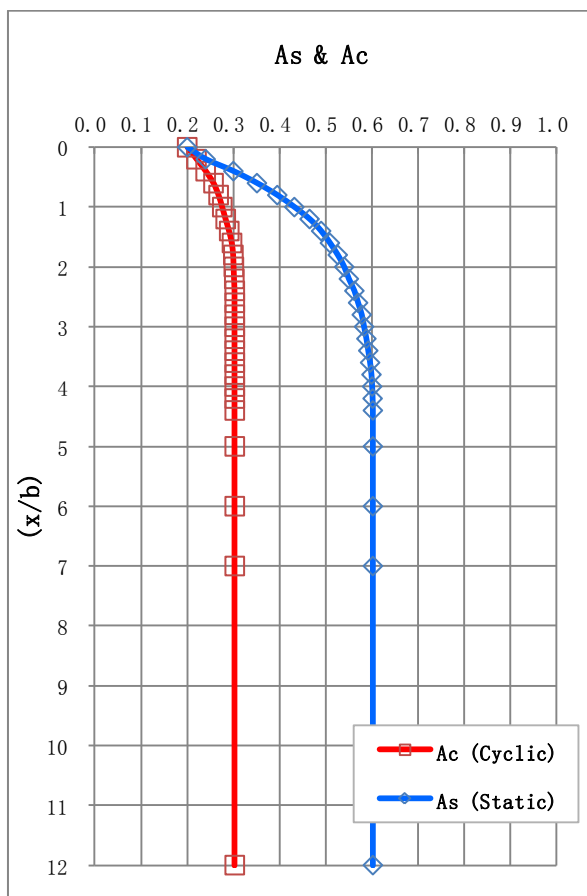


图 1.2.2 常数  $A_s$  和  $A_c$

- ⑤ 确定p-y曲线的初期直线段。

$$p = (kx)y \quad (1.2.3)$$

其中， $k$  值可在下表数据中选取适当的  $k_s$ 、 $k_c$  值。

表1.2.1 平均不排水剪切强度对应的地基反力系数

地基反力系数	平均不排水剪切强度( $tonf / ft^2$ )		
	0.5~1	1~2	2~4
$k_s$ (静荷载, $lb / in^3$ )	500	1000	2000
$k_c$ (动力荷载, $lb / in^3$ )	200	400	800

⑥ 计算  $y_{50}$ 。

$$y_{50} = \varepsilon_{50} b \quad (1.2.4)$$

$\varepsilon_{50}$  值可由试验获得，也可以利用下表选取适当的数据。

表1.2.2 平均不排水剪切强度对应的应变

应变	平均不排水剪切强度( $tonf / ft^2$ )		
	0.5~1	1~2	2~4
$\varepsilon_{50}$	0.007	0.005	0.004

⑦ 可使用下面公式确定p-y曲线的初期曲线段， $p_c$  值看通过公式(1.2.1)和(1.2.2)计算。

$$p = 0.5 p_c \left( \frac{y}{y_{50}} \right)^{0.5} \quad (1.2.5)$$

公式(1.2.5)适用于该公式与公式(1.2.3)的交点到  $y = A_s y_{50}$  的区段。

⑧ p-y曲线的第二个曲线段的公式如下。

$$p = 0.5 p_c \left( \frac{y}{y_{50}} \right)^{0.5} - 0.055 p_c \left( \frac{y - A_s y_{50}}{A_s y_{50}} \right)^{1.25} \quad (1.2.6)$$

公式(1.2.6)适用于由  $y = A_s y_{50}$  到  $y = 6A_s y_{50}$  的区段。

⑨ 第二段曲线段后的直线区段的公式如下。

$$p = 0.5 p_c (6A_s)^{0.5} - 0.411 p_c - \left( \frac{0.0625}{y_{50}} \right) p_c (y - 6A_s y_{50}) \quad (1.2.7)$$

公式(1.2.7)适用于由  $y = 6A_s y_{50}$  到  $y = 18A_s y_{50}$  区段。

⑩ 最后的直线段公式为如下。

$$p = 0.5 p_c (6A_s)^{0.5} - 0.411 p_c - 0.75 p_c A_s \quad (1.2.8)$$

$$p = p_c \left( 1.225 \sqrt{A_s} - 0.75 A_s - 0.411 \right) \quad (1.2.9)$$

公式(1.2.9)适用于  $y \geq 18A_s y_{50}$  区段。

绘制各区段的地基响应曲线时，当公式(1.2.3)和公式(1.2.5)之间存在交点时，将按照图1.2.1所示绘制p-y曲线。但是当公式(1.2.3)与公式(1.2.5)不存在交点时，则不用公式(1.2.5)，而是将公式(1.2.3)适用段延长并检查是否与公式(1.2.6)，如果还是没有交点，则只用公式(1.2.3)绘制p-y曲线。

下面介绍往复荷载作用下的地基响应曲线制作步骤(参见图1.2.3)

第①、②、③、⑤、⑥步骤与静荷载的方法相同。

④ 在图1.2.2中计算  $\frac{x}{b}$  对应的往复荷载系数  $A_c$ 。

$$y_p = 4.1 A_c y_{50} \quad (1.2.10)$$

⑦ p-y曲线的初期曲线段公式如下。

$$p = A_c p_c \left[ 1 - \left| \frac{y - 0.45 y_p}{0.45 y_p} \right|^{0.25} \right] \quad (1.2.11)$$

公式(1.2.11)的适用于从与公式(1.2.3)的交点到  $y = 0.6y_p$  的区段。

⑧ 后面的直线段公式如下。

$$p = 0.936A_c p_c - \frac{0.085}{y_{50}} p_c (y - 0.6y_p) \quad (1.2.12)$$

公式(1.2.12)适用于从  $y = 0.6y_p$  到  $y = 1.8y_p$  的区段。

⑨ 最后的直线段公式如下。

$$p = 0.936A_c p_c - \frac{0.102}{y_{50}} p_c y_p \quad (1.2.13)$$

公式(1.2.13)适用于  $y \geq 1.8y_p$  区段。

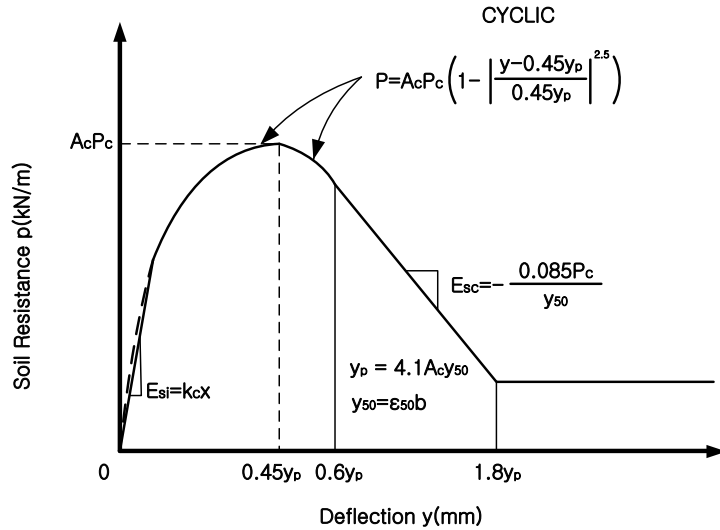


图 1.2.3 自由水面条件下坚硬粘土在水平往复荷载作用下的地基响应曲线

当公式(1.2.3)与公式(1.2.11)存在交点时，按图1.2.3所示绘制曲线。当公式(1.2.3)与其他公式没有交点时，取两个公式的较小值。

**推荐的土力学试验:**

为了获得坚硬粘性土的p-y曲线，可采用下面试验方法。

- ① 在现场有侧限条件下进行非固结不排水三轴试验获得土的抗剪强度。
- ② 使用未扰动土样进行室内试验，获得50%最大偏差应力对应的应变  $\epsilon_{50}$ 。

对坚硬的粘性土推荐使用三轴试验评价土的抗剪强度。虽然三轴压缩试验获得的抗剪强度有些保守，但是与其他试验方法相比，认为该方法获得的抗剪强度比较适合于桩基分析。另外，也要给出土的单位重量指标。

### 1.3 没有自由水面影响的坚硬粘性土

韦尔奇(Welch)和里斯(Reese)在没有自由水面影响的坚硬的粘性土上对直径  $36in$ 、埋置深度为  $42ft$  的桩进行了现场试验。距离地表  $20ft$  深度上的平均不排水抗剪强度为  $2,200lb/ft^2$ 。

短时间静荷载作用下地基响应曲线如图1.3.1所示。

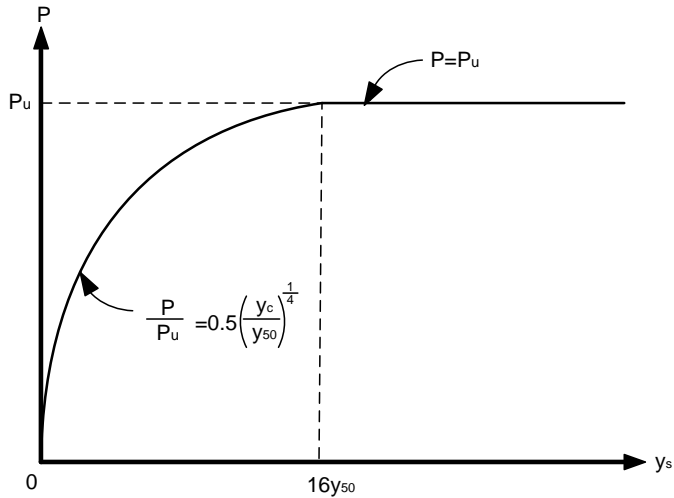


图 1.3.1 没有自由水面的坚硬的粘土在静荷载作用下的地基响应曲线

地基响应曲线的制作步骤如下(参见图1.3.1)。

- ① 测量相应深度的不排水抗剪强度( $c_u$ )、单位重量( $\gamma$ )、桩基直径( $b$ )。然后由试验所得应力-应变曲线计算  $\epsilon_{50}$ ，也可以直接取表1.1.1中推荐值。一般来说可使用0.01~0.005之间的值，数值越大结果越稳定。
- ② 计算桩单位长度上的极限地基反力。极限地基反力  $p_u$  的计算方法与软弱粘性土的计算方法一样，即取公式(1.1.1)和公式(1.1.2)中的较小值。
- ③ 相当于50%极限地基反力的位移  $y_{50}$  用公式(1.1.3)计算。

④ p-y初期曲线使用下面公式计算。

$$\frac{p}{p_u} = 0.5 \left( \frac{y}{y_{50}} \right)^{0.25} \quad (1.3.1)$$

⑤  $y \geq 16y_{50}$  时取  $p = p_u$ 。

对于往复荷载，地基响应曲线如图1.3.2所示，绘制布置如下。

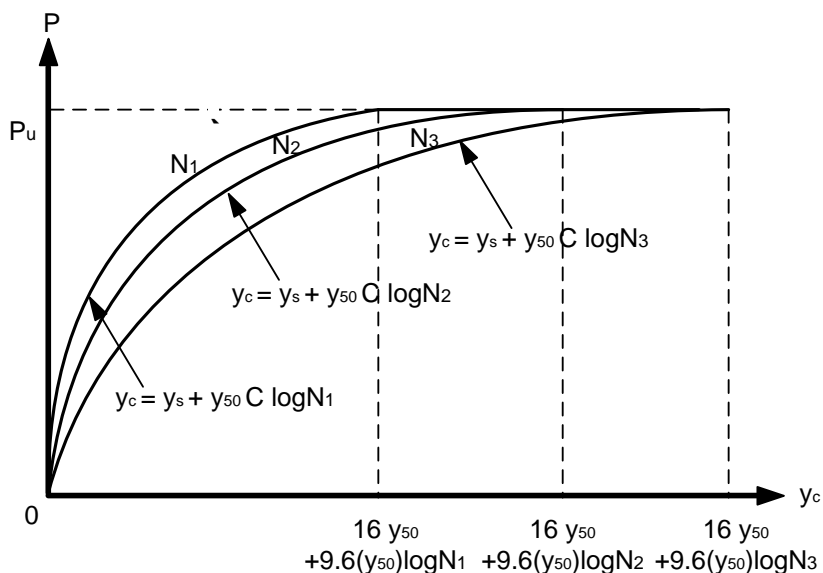


图 1.3.2 没有自由水面的坚硬的粘土在往复荷载作用下的地基响应曲线

- ① 使用与静荷载方法一样的方法绘制p-y曲线。
- ② 确定往复荷载的往复次数。
- ③ 往复荷载影响系数 C 可由室内往复荷载试验获得，并给出各种土的往复荷载次数影响系

数与  $\frac{p}{p_u}$  的关系公式。也可以使用韦尔奇和里斯(Welch & Reese, 1972)建议的公式, 公式如下。

$$C = 9.6 \left( \frac{p}{p_u} \right)^4 \quad (1.3.2)$$

④ 使用  $C$  值可得下面公式。

$$y_c = y_s + y_{50} \cdot C \cdot \log N \quad (1.3.3)$$

其中,  $y_c$  为往复次数  $N$  作用下的位移,  $y_s$  为短期静荷载作用下的位移,  $y_{50}$  为短期静荷载作用下的相当于50%极限地基反力对应的位移,  $N$  为荷载的往复次数。

⑤ 往复荷载作用时绘制的  $p$ - $y$  曲线的横坐标使用的是与往复次数( $N$ )相关的  $y_c$ 。

#### 推荐的土力学试验:

由不排水三轴压缩试验获得粘性土的抗剪强度和应力-应变曲线。一般来说可通过原位测试获得剪切强度, 使用未扰动土样进行室内试验获得应力-应变曲线。由以上方法获得的强度参数需要根据使用目的和分析对象取合适的数值, 并根据需要追加一些试验项目。另外, 也要给出土的单位重量指标。



## 1.4 地下水面条件下的砂质土

考克斯(Cox), 里斯和格拉布斯(Reese & Grubbs, 1974)在砂质土上对直径为  $24in$ 、长度为  $69ft$  的桩进行了静荷载和往复荷载的水平加载试验, 并获得了两种荷载的地基响应曲线。砂质土的内摩擦角为  $39^\circ$ 、饱和容重为  $66lb/ft^3$ 。

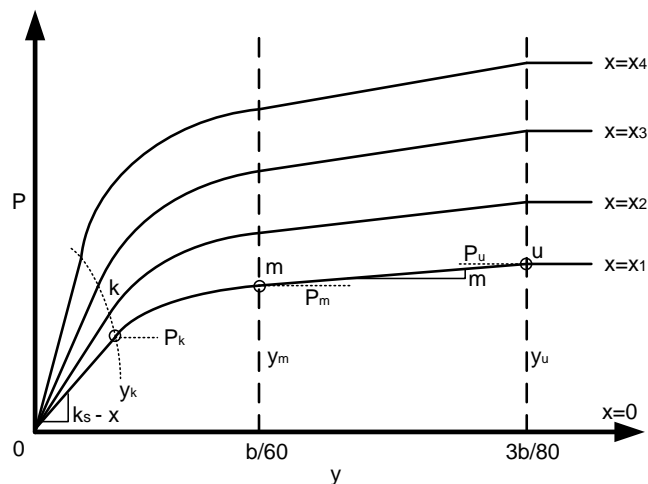


图 1.4.1 静荷载和往复荷载作用下砂质土的地基响应曲线

短期静荷载作用下的地基响应曲线的制作步骤如下。

- ① 测量砂质土的内摩擦角( $\phi$ )、单位重量( $\gamma$ )、桩的直径( $b$ )。
- ② 确定下列参数。

$$\alpha = \frac{\phi}{2}$$

$$\beta = 45 + \frac{\phi}{2}$$

$$K_0 = 0.4$$

$$K_a = \tan^2 \left( 45 - \frac{\phi}{2} \right)$$

- ③ 计算桩单位长度上的砂质土的极限地基反力，取下面两个公式计算结果中的较小值。

$$p_{st} = \gamma x \left[ \frac{K_0 \cdot x \cdot \tan \phi \cdot \sin \beta}{\tan(\beta - \phi) \cdot \cos \alpha} + \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \phi)} (b + x \cdot \tan \beta \cdot \tan \alpha) + K_0 \cdot x \cdot \tan \beta (\tan \phi \sin \beta - \tan \alpha) - K_a b \right] \quad (1.4.1)$$

$$p_{sd} = K_a \cdot b \cdot \gamma \cdot x (\tan^8 - 1) + K_0 \cdot b \cdot \gamma \cdot x \cdot \tan \phi \cdot \tan^4 \beta \quad (1.4.2)$$

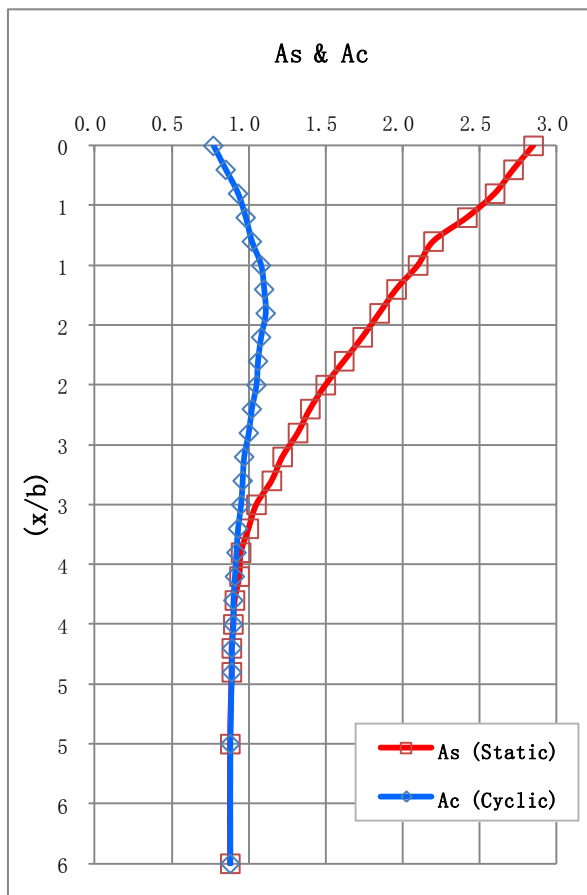
- ④ 计算公式(1.4.1)和公式(1.4.2)的转换支承点  $x_t$ 。转换支承点  $x_t$  之上的点使用公式(1.4.1)，转换支承点之下的点使用公式(1.4.2)。

- ⑤ 决定要绘制p-y曲线的计算位置  $x$ 。

- ⑥ 需要先确定极限点，计算极限位移 ( $y_u = \frac{3b}{80}$ ) 对应的极限地基反力，公式如下。

$$p_u = A_s p_s \quad \text{或} \quad p_u = A_c p_s \quad (1.4.3)$$

其中， $A_s$  和  $A_c$  可使用图1.4.2确定。 $p_s$  用第3步中确定的值。

图 1.4.2 确定常数  $A_s$ 、 $A_c$  的图表

⑦ 计算位移  $y_m = \frac{b}{60}$  对应的地基反力 ( $p_m$ )。

$$p_m = B_s p_s \quad \text{或} \quad p_m = B_c p \quad (1.4.4)$$

其中,  $B_s$  和  $B_c$  可从图1.4.3获得。  $p_s$  取适当的值, 使  $p_m$  点既满足前面抛物线方程(公式1.4.6), 也满足后面的直线公式(斜率为  $m$ )。  $y_m = \frac{b}{60}$  以后为斜率为  $m$  的直线段, 直线段的终点

为  $p_u$  点。

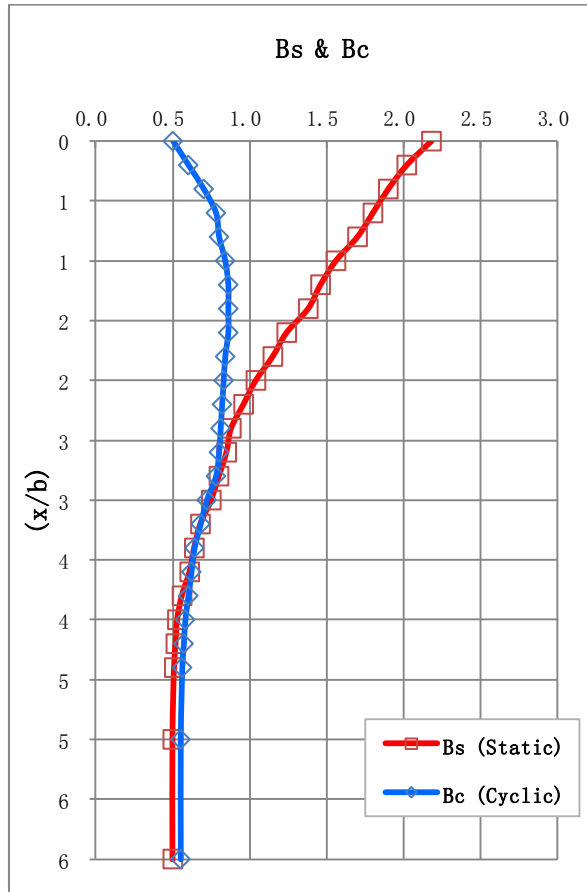


图 1.4.3 确定常数  $B_s$ 、 $B_c$  的图表

⑧ 确定  $p$ - $y$  曲线的初期直线段，公式如下。

$$p = (kx)y \tag{1.4.5}$$

其中，参数  $k$  可由表 1.4.1 和表 1.4.2 确定。

表1.4.1 地下水位以下的土的k值

相对密度	松散	中密	密实
$k \text{ (lb/in}^3\text{)}$	20	60	125

表1.4.2 地下水位以上的土的k值

相对密度	松散	中密	密实
$k \text{ (lb/in}^3\text{)}$	20	90	225

⑨ 确定p-y曲线的抛物线区段，公式如下。

$$p = \bar{C} \cdot y^{1/n} \quad (1.4.6)$$

为了绘制图1.4.1中  $k$  点和  $m$  点之间的抛物线，需要经过下列计算过程。

a. 计算图1.4.1中  $m$  点和  $u$  点之间的斜率，计算公式如下。

$$m = \frac{p_u - p_m}{y_u - y_m} \quad (1.4.7)$$

b. 计算图1.4.1中  $k$  点和  $m$  之间抛物线方程的次数  $n$  值，计算公式如下。

$$n = \frac{p_m}{m \cdot y_m} \quad (1.4.8)$$

c. 确定系数  $\bar{C}$ ，计算公式如下。

$$\bar{C} = \frac{p_m}{y_m^{1/n}} \quad (1.4.9)$$

d. 决定图1.4.1中  $k$  点位置，计算公式如下。

$$y_k = \left( \frac{\bar{C}}{k \cdot x} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (1.4.10)$$

e. 由上面的计算过程，确定公式(1.4.6)表现的曲线。

当开始直线段与抛物线有交点  $k$  时，就可以确定图1.4.1所示的p-y曲线。但是当不存在交点时则寻找后面直线公式的交点绘制p-y曲线。如果与后面的公式也没有交点，则使用初期直线段的公式绘制整体p-y曲线。

往复荷载作用下绘制曲线的方法与静荷载的方法类似，只是用  $k_c$ 、 $A_c$ 、 $B_c$  值分别替换了  $k_s$ 、 $A_s$ 、 $B_s$ 。

### **推荐的土力学试验：**

将有效附加荷载作为约束荷载进行三轴压缩试验，由试验获得土的内摩擦角。但是为了分析桩基而对砂质土进行三轴压缩试验不是容易的事情，特别是无法采集未扰动的土样。因此，根据现场条件，对砂质土可进行标准贯入试验和旁压试验等原位测试方法。

## 1.5 砂质土的地基响应曲线(API RP2A)

下面介绍美国石油学会(API, America Petroleum Institute)推荐的砂质土的地基响应曲线。API推荐的砂质土的p-y曲线包含了经验数据。里斯(Reese)和API的公式中极限地基反力( $p_u$ )值相同,但是API的公式更方便,两者最大的差异是地基反力的初始参数和曲线的形状公式。

下面的计算过程是短期静荷载和往复荷载作用下API RP2A(1987)建议的p-y曲线制作过程。

- ① 确定内摩擦角( $\phi$ )、单位重量( $\gamma$ )和桩的直径( $b$ )。
- ② 计算深度  $x$  处的极限地基反力,一般来说深度较浅时使用公式(1.5.1),深度较深时使用公式(1.5.2)。最终取两个公式结果的较小值。

$$p_{us} = (C_1x + C_2b)\gamma'x \quad (1.5.1)$$

$$p_{ud} = C_3b\gamma'x \quad (1.5.2)$$

其中,  $p_u$  为单位长度极限地基反力,  $\gamma'$  为有效单位重量,  $x$  为计算深度,  $\phi$  为砂质土的内摩擦角,  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  为用内摩擦角( $\phi$ )计算的系数(参见图1.5.1),  $b$  为桩平均直径。

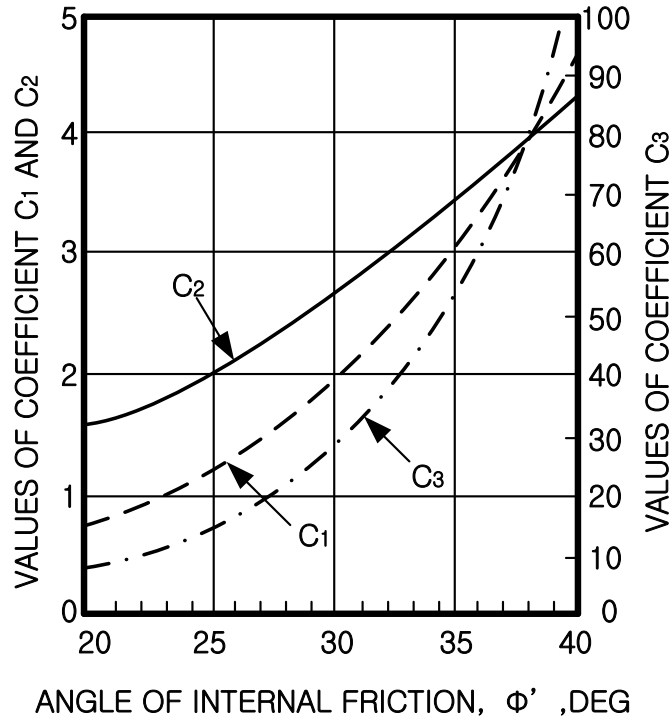


图 1.5.1 内摩擦角对应的系数

③ 使用阶段②中计算的  $p_u$  绘制水平地基反力-位移曲线的公式如下。

$$p = Ap_u \tanh \left[ \frac{kx}{Ap_u} y \right] \quad (1.5.3)$$

其中，静力或往复荷载作用下的系数  $A$  如下。

$$A = \left( 3.0 - 0.8 \frac{x}{b} \right) \geq 0.9 \quad (\text{适用于静力荷载})$$

$$A = 0.9 \quad (\text{适用于往复荷载})$$

$p_u$  取公式(1.5.1)和公式(1.5.2)中的较小值。 $k$  为初始地基反力系数，可使用内摩擦角( $\phi$ )利



用图1.5.2计算。 $y$  为横向位移、 $x$  为计算深度。

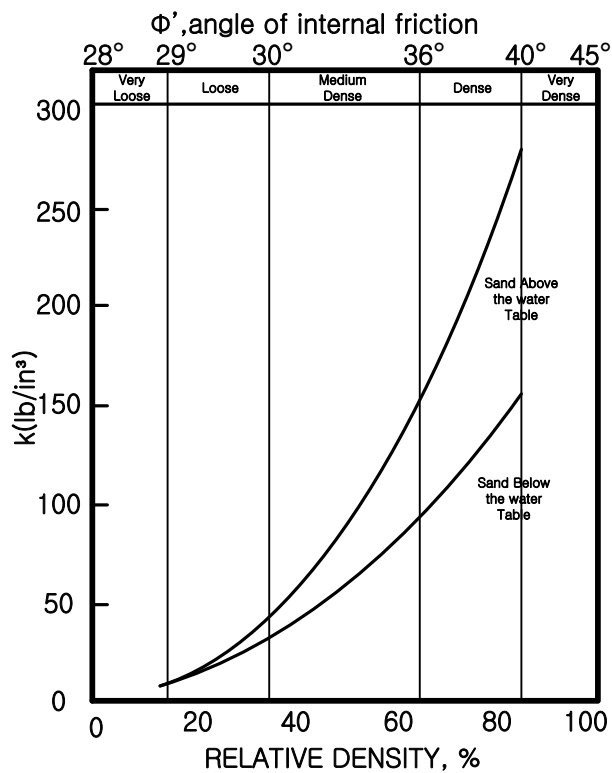


图 1.5.2 API 推荐的砂质土的初始地基反力系数

## 1.6 $c-\phi$ 土的地基响应曲线

前面介绍了粘性土和砂质土的地基响应曲线。因为考虑到计算的方便性和结果的安全性，前面介绍的地基响应曲线中只使用了内摩擦角和粘聚力中的一个参数。但是对于大部分的地基土同时具有两个参数特性。

对于非饱和粘性土，从试验结果也能看到具有粘聚力  $c$  和内摩擦角  $\phi$  的特性。对于砂质土地基处于固结状态时，随着粘聚力的增加，其抗剪强度也会增加。处于固结排水状态的粘性土同时具有  $c$  和  $\phi$  特性。

图1.6.1为短期静荷载或往复荷载作用下的地基响应曲线。制作步骤与前面砂质土的地基响应曲线制作步骤类似，极限地基反力( $p_u$ )由抵抗桩变形的作用在桩的正面的反力计算而得，该反力与桩侧面的抵抗力之和不能超过桩的背面上作用的外力。另外桩背面的阻力(主动土压力)和桩侧面上的阻力与桩正面的被动土压力相比很小，可以忽略。

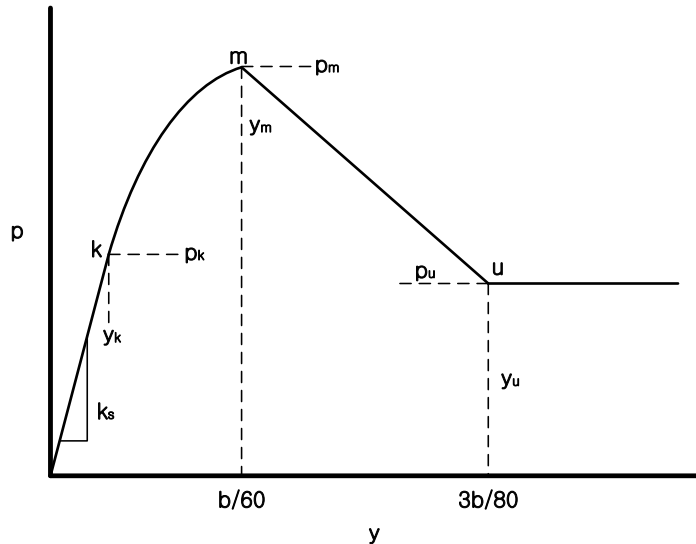


图 1.6.1 考虑土的粘聚力和内摩擦角特性时地基响应分析曲线

埃文斯和邓肯(Evans & Duncan, 1982)基于上述考虑提供了  $c-\phi$  地基的极限反力近似计算公

式，公式如下。

$$p = \sigma_p b = C_p \sigma_h b \quad (1.6.1)$$

其中， $\sigma_p$  为考虑三维被动楔体破坏的被动土压力， $b$  为桩的宽度， $C_p$  为无量纲修正系数。

另外， $\sigma_h$  为基于郎肯(Rankine)理论计算的被动土压力，可以使用下面公式计算。

$$\sigma_h = \gamma x \tan^2 \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right) + 2c \tan \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right) \quad (1.6.2)$$

其中， $\gamma$  为土的容重， $x$  为考虑被动受压效果的深度， $\phi$  为土的内摩擦角， $c$  为粘聚力。

将无量纲修正系数  $C_p$  分为粘聚力项  $C_{pc}$  和内摩擦角项  $C_{p\phi}$ ，整理公式(1.6.1)和公式(1.6.2)可得如下公式。

$$p_u = \left[ C_{p\phi} \gamma x \tan^2 \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right) + C_{pc} \tan \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right) \right] b \quad (1.6.3)$$

将埃文斯和邓肯的  $c - \phi$  地基上的  $p-y$  曲线上的极限地基反力公式整理如下。

$$p_u = \bar{A} p_{u\phi} + p_{uc} \quad (1.6.4)$$

其中， $\bar{A}$  可由图1.6.2计算。代表摩擦力项的极限地基反力( $p_{u\phi}$ )取下面公式计算结果中的较小值。

$$p_{u\phi} = \gamma x \left[ \frac{K_0 x \tan \phi \sin \beta}{\tan(\beta - \phi) \cos \alpha} + \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \phi)} (b + x \tan \beta \tan \alpha) \right. \\ \left. + K_0 x \tan \beta (\tan \phi \sin \beta - \tan \alpha) - K_a b \right] \quad (1.6.5)$$

$$p_{u\phi} = K_a b \gamma x (\tan^8 \beta - 1) + K_0 b \gamma x \tan \phi \tan^4 \beta \quad (1.6.6)$$

代表粘聚力项的极限地基反力( $p_{uc}$ )取下面公式计算结果中的较小值。

$$p_{uc} = \left[ 3 + \frac{\gamma'}{c} x + \frac{J}{b} x \right] cb \quad (1.6.7)$$

$$p_{uc} = 9cb \quad (1.6.8)$$

$c-\phi$  地基的地基响应曲线与砂质土相似，参照里斯等人(Reese et al, 1974)建议的砂质土计算公式，地基响应曲线的制作步骤如下(参照图1.6.1)。

- ① 计算  $y_u = \frac{3b}{80}$  对应的  $p_u$ 。

$$p_u = \bar{A}_s p_{u\phi} + p_{uc} \quad (1.6.9)$$

$$p_u = \bar{A}_c p_{u\phi} + p_{uc} \quad (1.6.10)$$

其中， $\bar{A}_s$ 、 $\bar{A}_c$  可利用图1.4.2计算而得。

- ② 计算  $y_m = \frac{b}{60}$  对应的  $p_m$ 。

$$p_m = \bar{B}_s p_s, \quad p_m = \bar{B}_c p_s \quad (1.6.11)$$

其中， $\bar{B}_s$ 、 $\bar{B}_c$  可利用图1.4.3选取适当的值。

图1.6.1中从  $y_m = \frac{b}{60}$  点到  $y_u = \frac{3b}{80}$  点为直线区段。

- ③ 初期直线段的计算公式如下。

$$p = (kx)y \quad (1.6.12)$$

其中， $k$  可分为内摩擦角项和粘聚力项。

$$k = k_c + k_\phi \quad (1.6.13)$$

其中  $k_c$  和  $k_\phi$  可由下图获得。

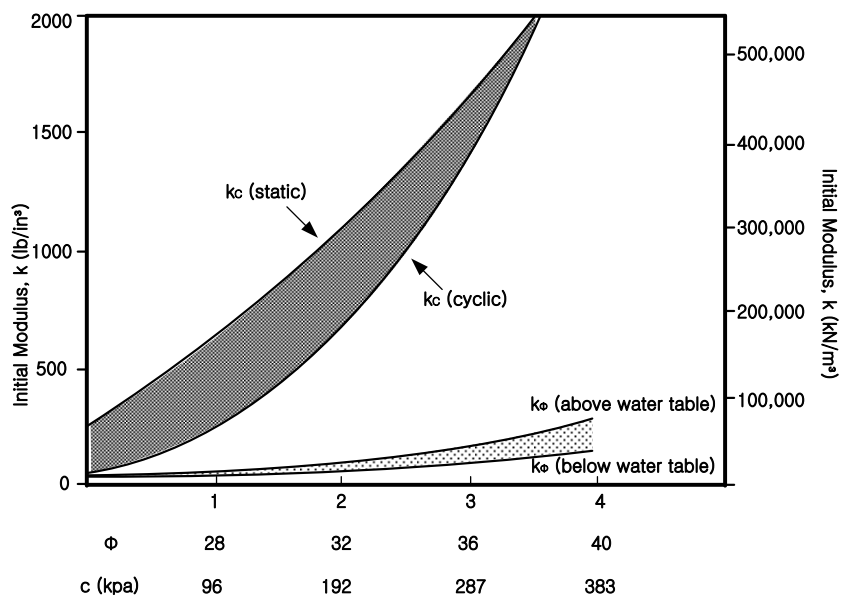


图 1.6.2 泥沙的  $k$  值

④ 决定  $p$ - $y$  曲线的抛物线区段。

$$p = \bar{C}y^{1/n} \quad (1.6.14)$$

$k$  点和  $m$  点之间的曲线可通过下面步骤确定。

a. 计算  $m$  点和  $u$  点之间直线的斜率。

$$m = \frac{p_u - p_m}{y_u - y_m} \quad (1.6.15)$$

b. 曲线段公式(1.16.4)中的参数 $n$ 计算公式如下。

$$n = \frac{P_m}{my_m} \quad (1.6.16)$$

c. 计算系数 $\bar{C}$ 。

$$\bar{C} = \frac{P_m}{y_m^{1/n}} \quad (1.6.17)$$

d. 计算 $k$ 点的位移。

$$y_k = \left( \frac{\bar{C}}{kx} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (1.6.18)$$

初期直线段和曲线段有交点时，则会形成图1.6.1所示的图形。当没有交点时则需要求初期直线段与后面直线的交点，如果还是没有交点则使用初期直线段作为地基响应曲线。

## 1.7 岩石地基的地基响应曲线

一般重要结构物会选择岩石层作为地基持力层。桩基础通过打击完全贯入岩石层很难，所以一般会选择钻孔的方法施工。因此岩石地基的地基响应曲线与粘土和砂质土有很大不同。

岩石一般分为硬岩(strong rock)和软岩(weak rock)，对岩石的强度可使用岩石分级指标R.M.R (Rock Mass Rating)和岩石质量指标R.Q.D(Rock Quality Designation)评价，本程序中使用R.Q.D值。

在岩石地基的地基响应曲线中没有考虑岩石的类型、节理等特性。另外在岩石地基中桩的变形很小，通过载荷试验很难获得岩石地基的极限反力。但是为了计算桩的安全性，我们仍然需要桩的极限反力。因此在确定岩石地基的极限反力时需要很多经验的因素。

### 1.7.1 硬岩的地基响应曲线

水平荷载作用下硬岩的p-y曲线参见图1.7.1。因为参数信息不充分，岩石的地基响应曲线没有考虑强度随深度变化的趋势，也没有考虑往复荷载的影响。

由图可知，桩的水平方向位移超过  $0.0004b$  时，岩石地基将发生脆性破坏。但是因为岩石地基的试验数据较少，对此结果工程师要根据经验对具体工程进行合理性判断。具有节理、裂隙的原场地的岩石特性与试验样本的结果会有很大差异。

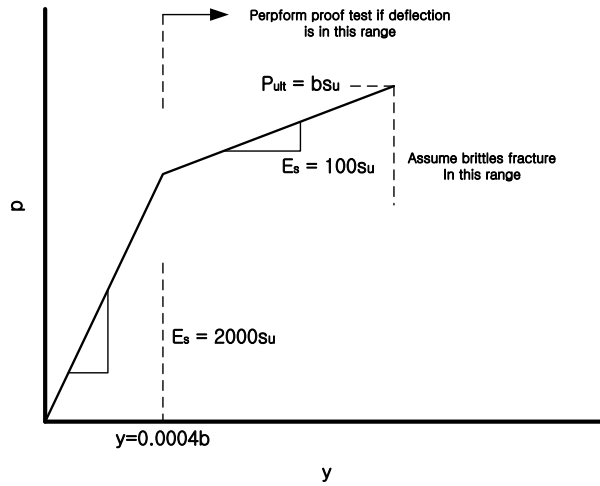


图 1.7.1 硬岩的地基响应曲线

### 1.7.2 软岩地基的地基响应曲线

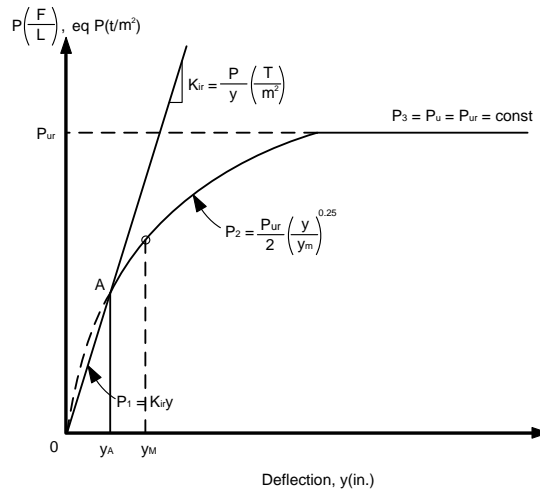


图 1.7.2 软岩地基的地基响应曲线



软岩地基的地基响应曲线与砂质土的曲线类似。软岩的地基发生楔体破坏时的极限地基反力计算公式如下。

$$p_{ur} = \alpha_r q_{ur} b \left( 1 + 1.4 \frac{x_r}{b} \right), \quad (0 \leq x_r \leq 3b) \quad (1.7.1)$$

$$p_{ur} = 5.2 \alpha_r q_{ur} b, \quad (x_r > 3b) \quad (1.7.2)$$

其中， $q_{ur}$  为岩石的单轴抗压强度， $\alpha_r$  为强度折减系数， $b$  为桩的直径， $x_r$  为计算位置深度。

软岩的地基响应曲线是通过砂石(sand stone)地基获得的，当砂石的单轴抗压强度  $q_{ur} < 6.9 \text{MPa}$  时，需要判断是否可以视为软石。

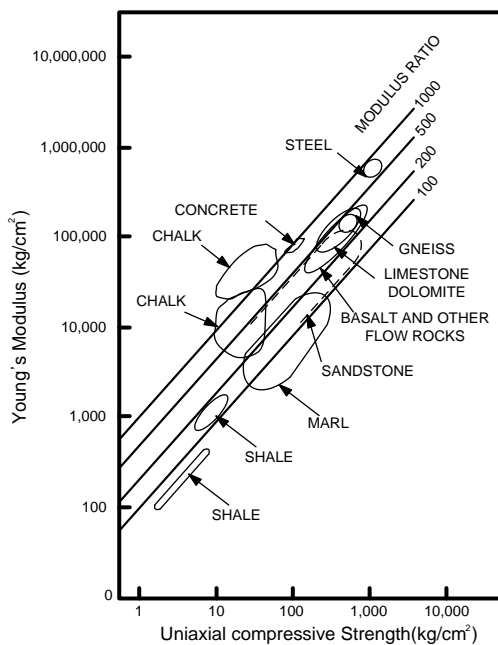


图 1.7.3 软岩的地基响应系数和单轴抗压强度

岩石在微小变形下也会发生破坏，在只使用单轴抗压强度评价岩石是否破坏时，需要考虑强度折减系数。因为桩基施工对不同地基的扰动作用不同，强度折减系数  $\alpha_r$  为RQD函数。一般

来说，RQD为100时取  $\alpha_r = 1/3$ ，RQD为0时取  $\alpha_r = 1$ ，中间值可使用线性内插计算。

在图1.7.2中， $K_{ir}$  值可使用放置在匀质弹性地基上的梁理论，按下面公式计算。

$$K_{ir} = k_{ir} E_{ir} \quad (1.7.3)$$

其中， $E_{ir}$  为岩石的初始地基反力系数， $k_{ir}$  为无量纲系数。

无量纲系数  $k_{ir}$  可按下面公式计算。

$$k_{ir} = \left( 100 + 400 \frac{x_r}{3b} \right) \quad 0 \leq x_r \leq 3b \quad (1.7.4)$$

$$k_{ir} = 500, \quad x_r > 3b \quad (1.7.5)$$

$$p = K_{ir} y \quad y \leq y_A \quad (1.7.6)$$

$$p = \frac{P_{ur}}{2} \left( \frac{y}{y_m} \right)^{0.25} \quad y > y_A, \quad p \leq P_{ur} \quad (1.7.7)$$

$$p = P_{ur} \quad (1.7.8)$$

$$y_m = k_{im} b \quad (1.7.9)$$

其中， $k_{im} = 0.0005 \sim 0.00004$ 。

$y_A$  为公式(1.7.6)和公式(1.7.7)的交点，可用下面公式计算。

$$y_A = \left( \frac{P_{ur}}{2y_m^{0.25} K_{ir}} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (1.7.10)$$

使用上面公式可确定软岩的p-y曲线。

一般来说，岩石本身具有足够的承载能力，因此可以不必采用埋入岩石中的桩基，但是当岩石风化较为严重时也可以使用桩基。



# 竖向荷载作用下的地基响应曲线

## 2.1 概要

前面章节中介绍了水平荷载作用下的地基的荷载-位移关系。本章将介绍竖向荷载作用下荷载和沉降的关系。虽然可通过竖向加载试验可以获得荷载-沉降关系曲线，但是在方案设计阶段不需要进行这样的加载试验。下面介绍制作竖向荷载-沉降曲线的非加载试验方法。

深基础的荷载-沉降曲线一般如图2.1.1所示，当加载到点  $P$  (荷载为  $Q_p$ ) 后卸载时将沿着图中左侧实线运动，即时完成卸载也会存在残留沉降。

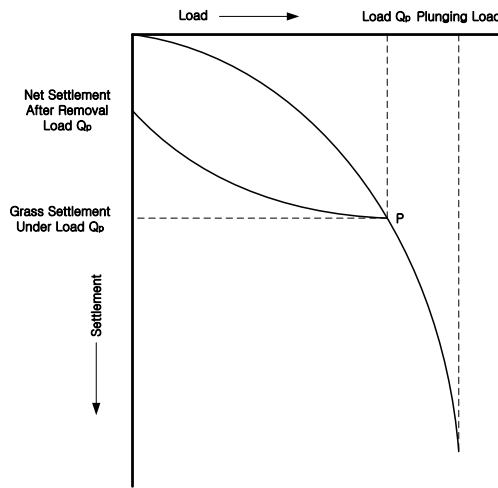


图 2.1.1 竖向荷载-沉降关系曲线

作用在桩上的竖向荷载向土中分散的过程如下。深基础中荷载沿着桩长分布如下图2.1.2所示。此时曲线的斜率为荷载的桩的分担比例。

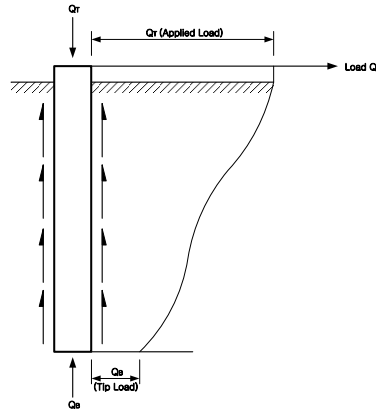


图 2.1.2 竖向荷载作用下桩沿深度方向的荷载分布

如图2.1.3所示，对深基础来说，使用一个桩单元模拟整个桩会本不准确，因此将单元分割成几个桩单元，每个桩单元节点上土的地基响应是不同的。

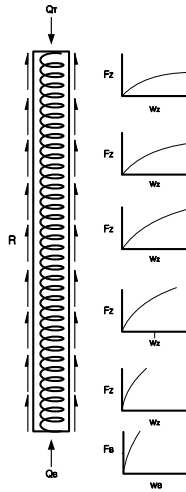


图 2.1.3 地基的竖向变形示意图

当桩上作用竖向荷载  $Q_r$  时，外部荷载与桩端支承力  $Q_b$  和桩周摩擦力  $R$  形成平衡。由上图可知，不仅是桩侧摩擦力是非线性的，桩端反力也是非线性的。

## 2.2 粘性土中桩摩阻力的荷载传递函数

科伊尔和里斯(Coyle & Reese, 1966)通过现场和室内试验提供了荷载传递曲线，其结果参见下表。

表2.2.1 粘性土的荷载传递

荷载传递/最大荷载传递	桩沉降量( <i>in</i> )
0	0
0.18	0.01
0.38	0.02
0.79	0.04
0.97	0.06
1.00	0.08
0.97	0.12
0.93	0.16
0.93	0.20
0.93	0.20

里斯和奥尼尔(Reese & O'Neill, 1987)通过数次现场试验，提出了如下图2.2.1所示的改善的荷载传递曲线。如图2.2.1所示，沉降量约为桩直径的0.6%时发生了最大荷载传递。试验桩的直径范围为  $24in \sim 36in$ ，因此荷载全部转移时的沉降量约为  $0.2in$ 。当大于该沉降量时应使用科伊尔和里斯的公式。

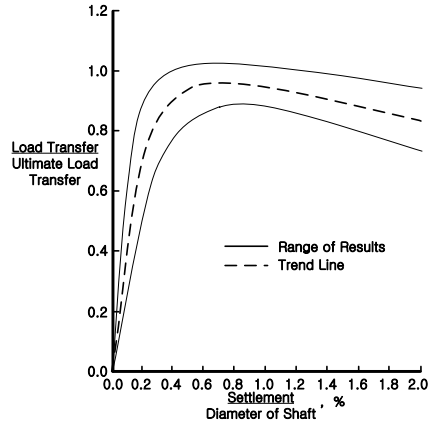


图 2.2.1 粘性土的荷载传递-沉降曲线(Reese and O'Neill, 1987)

### 2.3 粘性土中桩端反力的荷载传递函数

斯肯普顿(Skempton, 1951)通过应力-应变曲线室内试验提出了桩端位置的荷载-桩端位移关系公式。50%极限荷载对应的应变( $\varepsilon_{50}$ )大约在0.005~0.02范围内, 计算公式如下。

$$q_b = N_c \left( \frac{\sigma_f}{2} \right) \quad (2.3.1)$$

$$\frac{w_b}{B} = 2\varepsilon_{50} \quad (2.3.2)$$

其中,  $q_b$  为地基的破坏应力,  $\sigma_f$  为破坏压应力,  $N_c$  为承载力系数,  $B$  为基础的直径,  $\varepsilon_{50}$  为非约束状态下的应变,  $w_b$  为基础的沉降量。

桩端的荷载-沉降曲线如下。

$$Q_b = K_b (w_b)^n \quad (2.3.3)$$

其中,  $K_b$  为调整系数,  $n$  一般取0.5。

里斯和奥尼尔(Reese & O'Neill, 1987) 通过数次现场试验, 提出了如下图2.3.1所示的粘性土桩端的荷载传递曲线。

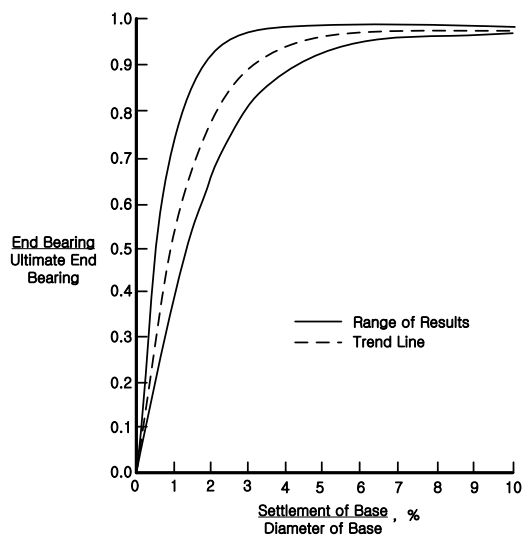


图 2.3.1 粘性土地基上的桩端荷载-位移曲线(Reese and O'Neill, 1987)

## 2.4 砂质土中桩摩阻力的荷载传递函数

科伊尔和苏莱曼(Coyle & Sulaiman, 1967)在砂质土中进行了对钢桩周边摩擦的荷载传递试验,并给出了如图2.4.1所示的结果。

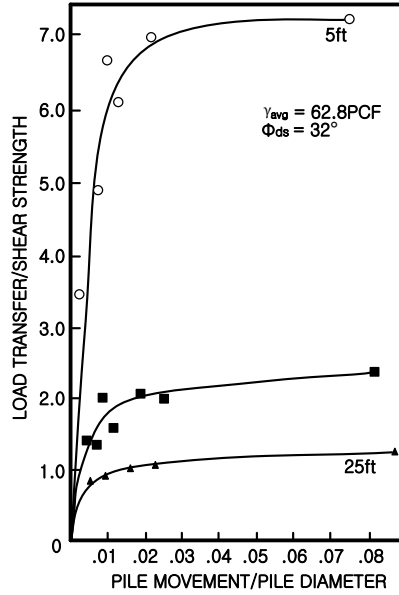


图 2.4.1 砂质土中的桩轴摩擦力的荷载传递曲线(Coyle and Sulaiman, 1967)

图中曲线的公式如下。

$$f = K_s \left( \frac{w}{B} \right)^{0.15}, \quad \frac{Z}{B} \leq 0.07 \quad (2.4.1)$$

其中,  $f$  为荷载传递量,  $w$  为桩的沉降,  $B$  为桩径,  $K_s$  为调整系数。

里斯和奥尼尔(Reese & O'neill, 1987)通过很多原场试验给出了砂质土的荷载-沉降曲线(参见图 2.4.2)。



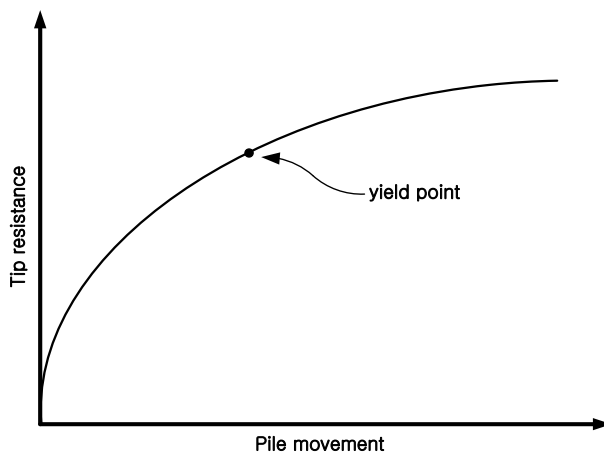


图 2.4.2 桩端的位移-反力关系曲线

莫舍(Mosher, 1984)对砂质土中的桩周摩擦力给出了荷载传递曲线, 公式如下。

$$f = \frac{w}{\frac{1}{E_s} + \frac{1}{f_{\max}}} \quad (2.4.2)$$

其中,  $f$  为单位荷载传递量,  $w$  为桩的沉降量,  $f_{\max}$  为最大单位荷载传递量,  $E_s$  为土系数。

表2.4.1 砂质土的材料特性

相对密度	内摩擦角( $\phi$ )	$E_s$ ( $lbs / ft^2 / in$ )
散	28-31	6,000-10,000
中	32-34	10,000-14,000
密	35-38	14,000-18,000

## 2.5 砂质土中桩端反力的荷载传递函数

维嘉沃基亚(Vijayvergiya, 1977)和莫舍(Mosher, 1984)通过多次试验, 给出了砂质土中桩端的荷载-位移函数, 公式如下。

$$q = \left( \frac{z}{z_c} \right)^{1/3} q_{\max} \quad (2.5.1)$$

其中, 最大承载力  $q_{\max}$  的计算公式如下。

$$q_{\max} = \bar{\sigma}_v N_q \quad (2.5.2)$$

其中,  $\bar{\sigma}_v$  为有效竖向应力。  $N_q$  为反力系数, 可使用梅耶霍夫(Meyerhof)公式计算如下。

$$N_q = \varepsilon^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.5.3)$$

维嘉沃基亚(Vijayvergiya, 1977)在计算极限位移  $z_c$  时考虑了桩端宽度。当位移  $z$  小于极限位移  $z_c$  时, 随着位移的增加桩端反力也在增加; 当位移超过了极限位移时, 桩端反力维持不变。

如图2.4.2所示, 莫舍(Mosher, 1984)假设桩端反力特性与弹塑性材料的非线性特性类似, 当桩端位移超过  $0.25in$  时, 假设桩端达到了屈服状态。

$$q = \left( \frac{z}{0.25} \right)^{1/3} q_{\max} \quad (2.5.4)$$

该公式结果与现场测量结果吻合较好, 综合对不同密度的现场测量结果, 整理如下。

$$\text{松散} \quad q = (4 \zeta)^{1/2} \rho_a$$

$$\text{中密} \quad q = (4 \zeta)^{1/3} \rho_a$$

$$\text{密实} \quad q = (4 \zeta)^{1/4} \rho_a$$

其中, 最大屈服桩端反力  $q_{\max}$  可使用公式(2.5.2)计算。



# 水平荷载作用下的群桩效应

## 3.1 概要

非线性p-y曲线大部分是由单桩的室内试验获得的，但是实际设计中会存在很多群桩，当桩距过小时，单桩抵抗水平力有降低的倾向。为此，布朗等人(Brown et al, 1987)引入了折减系数  $f_m$  考虑这种群桩效应(参见图3.1.1)。

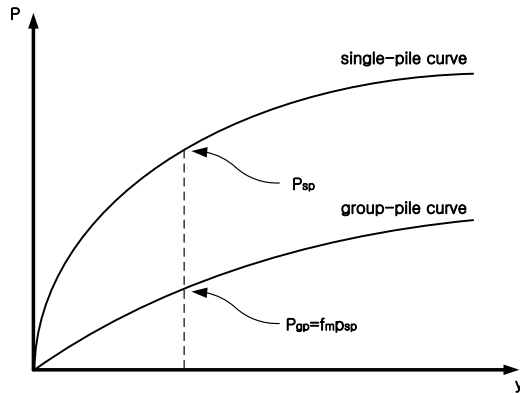


图 3.1.1  $f_m$  的定义

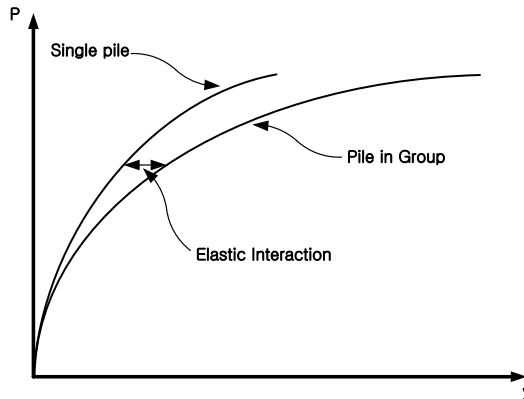


图 3.1.2 群桩效应

另外，桩的间距非常近时，桩之间会有弹性影响，折减系数将按图3.1.2所示定义，此时群桩的极限水平承载力与单桩的极限水平承载力之和相同。

一般来说，由于群桩效应的影响，群桩的承载力会小于单桩的承载力之和。如图3.1.3所示，应使用布朗等人建议的公式对单桩的承载力进行折减。

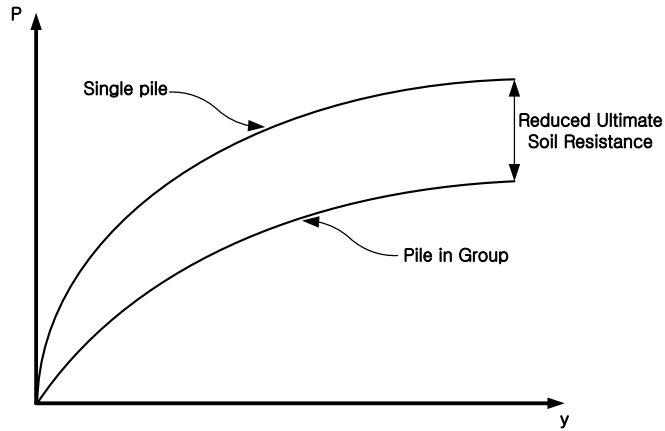


图 3.1.3 群桩效应引起的单桩承载力降低

影响群桩效应的因素较多，在SoilWorks中只考虑了桩距的影响。下面将在第3.2节、第3.3节介绍桩横向和纵向间距对折减系数的影响，在第3.4节介绍斜向间距对折减系数的影响。

### 3.2 桩横向间距对折减系数的影响

普拉卡斯(Prakash, 1962)、考克斯等人(Cox et al, 1984)、Wang(1986)、Lieng(1988)对水平荷载作用下横向间距对群桩效应的影响进行了研究。如图3.2.1所示,折减系数  $\beta_a$  可由与  $S/b$  的关系曲线获得,  $S$  为与荷载作用方向垂直方向的桩中心距离、 $b$  为桩径。

如图所示,当桩径与桩距相同时,极限承载力折减50%;桩间距为直径的3倍以上时,极限承载力没有折减。该折减系数函数与土的类型不相关。

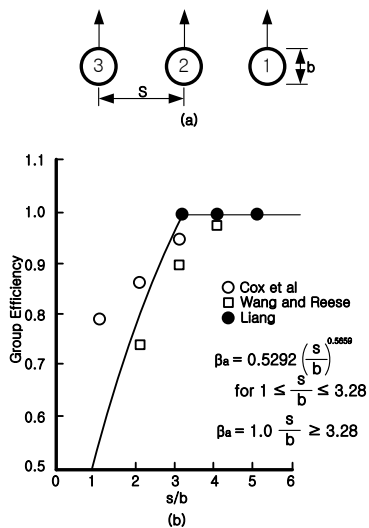


图 3.2.1 桩的横向间距对折减系数的影响

### 3.3 桩纵向间距对折减系数的影响

荷载作用方向的桩间距对折减系数的影响相对复杂一些，Dunnivant和O'Neill(1986)将桩分为前桩和后桩，如图3.2.1a所示的1号桩为2号、3号桩的前桩，2号桩为3号桩的前桩。折减系数也没有考虑土的特性。先桩的纵向桩间距对折减系数的影响参见图3.3.1b。

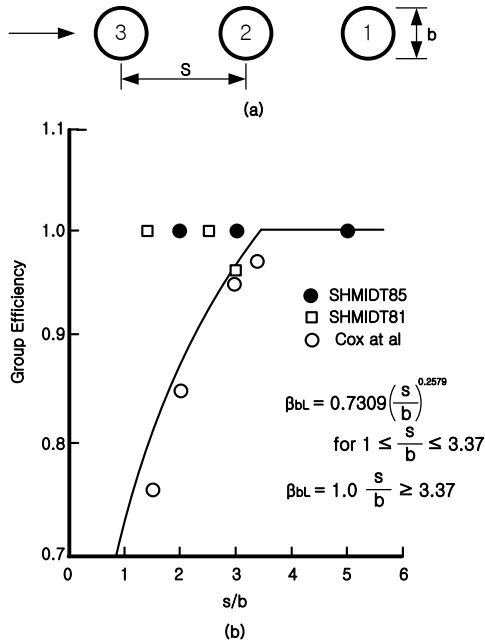


图 3.3.1 先桩的纵向桩间距对折减系数的影响

如图3.3.2a所示，3号桩为1号、2号桩的后桩，2号桩为1号桩的后桩。后桩的纵向桩间距对折减系数的影响参见图3.3.2b，由图可知当  $s/b$  不小于6时，后桩几乎对折减系数没有影响。

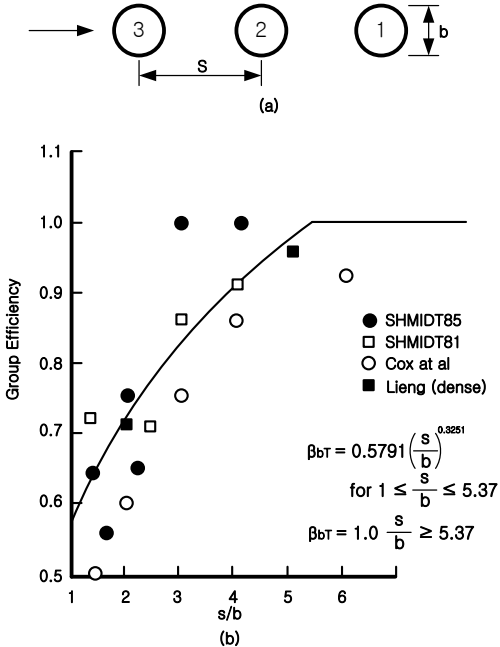


图 3.3.1 后桩的纵向桩间距对折减系数的影响

### 3.4 桩斜向间距对折减系数的影响

如图3.4.1所示，桩中心连线与荷载作用方向有倾斜角时，可使用图3.2.1计算折减系数  $\beta_a$ ，使用图3.3.1和图3.3.2计算折减系数  $\beta_b$ ，然后利用下面公式计算折减系数。

$$\beta_s = \left( \beta_b^2 \cos^2 \phi + \beta_a^2 \sin^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.1)$$

其中， $\phi$  为荷载作用方向与桩中心连线的夹角。

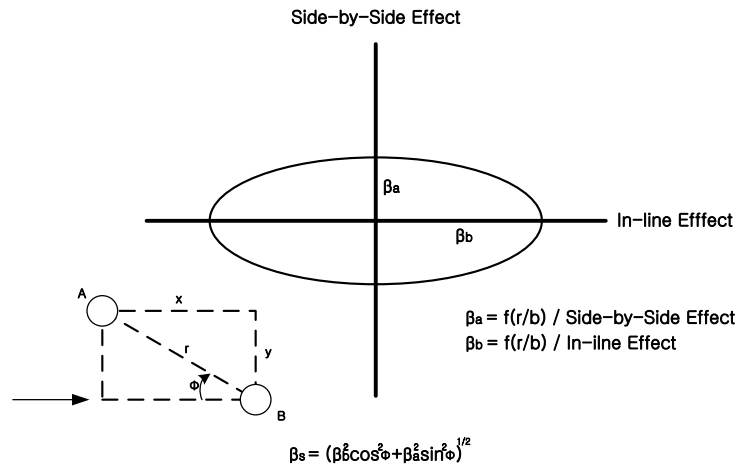


图 3.4.1 斜向桩间距对折减系数的影响



## 第6部分

---

# 渗流分析

### 渗流分析

- 第1章 渗流方程
- 第2章 有限元方程
- 第3章 非线性渗流



# 渗流分析

## ○ 渗流分析 / 001

### ○ 第1章 渗流方程 / 002

1.1 流动定律 / 002

1.2 基本方程 / 003

### ○ 第2章 有限元方程 / 007

2.1 有限元方程 / 007

2.2 时间积分 / 010

2.3 分析结果 / 012

### ○ 第3章 非线性渗流 / 013

3.1 概要 / 013

3.2 边界条件 / 013

3.2.1 渗流边界函数 / 013

3.2.2 渗流面边界 / 014

3.2.3 降雨分析用的流量-水头转换功能  
/ 016

3.2.4 水位变化分析用的水头-流量转换功能  
/ 017





# 渗流分析

本手册介绍的是SoilWorks渗流分析中使用的方法、方程等技术内容。了解这部分内容会有助于程序的使用、问题的解决以及对于分析结果进行合理的判断。

渗流分析一般可以区分为稳态分析(steady state analysis)和非稳态分析(transient analysis)。

稳态分析是指地基的内部及外部边界条件不随时间发生变化的分析。因此分析过程中的流入量和流出量始终保持一致。相反在非稳态分析中，即使使用稳定状态的边界条件，流入量和流出量也有可能随时间发生变化。

如果在可渗透性土层的边界上存在水头差(head difference)或流量(flux)就会发生地下水的渗透现象。

渗流(seepage flow)是沿着土颗粒的孔隙连接而成的路径流动的。这种流动遵循达西(Darcy)定律，即稳定状态下通过土体的渗流量等于渗流系数的动水力梯度(或称为水力坡降)和截面面积的乘积。达西定律尽管最初是从饱和条件下得到的，但也适用于非饱和条件。

非饱和状态是指完全干燥状态和完全饱和状态之间的状态。随着饱和度(土体中孔隙水体积与孔隙体积的比值)降低小于100%时，土颗粒之间的孔隙中除了水分还会存在空气气泡，当饱和度非常低时，水分会以一种凹进去的形态附着在土颗粒之间。

随着饱和度降低，孔隙水压会因为表面张力的影响逐渐转变为受拉状态，因此也把负孔隙水压(negative pore pressure)叫做吸水压(suction pressure)。一般情况下饱和度越低吸水压越大。

非稳态分析是指地基的内部或外部的边界条件随时间发生变化的分析。

非稳态分析和稳态分析的区别就在于边界条件随时间而变化，以及需要考虑体积含水率(volumetric water content)的影响。地下水位上升或者下降时，与上升速度和下降速度有非常紧密关系的因素包括非饱和区域的含水率和孔隙率等。以土坝为例，在完全干燥状态开始蓄水(water filling of reservoir)和在拥有一定含水率状态下开始蓄水，这两种情况下内部渗流完全达到稳定状态所需时间还是存在显著差异的。



# 渗流方程

## 1.1 流动定律

SoilWorks中使用达西定律来描述地基饱和状态及非饱和状态下的渗流现象，具体公式如下。

$$q = ki \tag{1.1.1}$$

其中，  
 $q$  : 渗流量，  
 $k$  : 渗流系数，  
 $i$  : 水力坡度

达西定律是针对饱和土条件推导出来的，不过后来经过大量的研究发现也同样适用于非饱和土，只是非饱和土的渗流系数并不是恒定的，而是随含水率、孔隙水压(或压力水头)的变化而变化。

达西定律也可以按下式表述。

$$v = ki \tag{1.1.2}$$

其中， $v$  是叫达西速度。水在土中流动时的平均速度等于达西速度除以土的孔隙率，因为孔隙率小于1，因此实际平均流速总是比达西速度快。

## 1.2 基本方程

SoilWorks中渗流的基本微分方程如下。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial H}{\partial z}\right) + Q = \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (1.2.1)$$

其中,

$H$	: 总水头 (m)
$k_x$	: x 方向的渗流系数 (m/sec)
$k_y$	: y 方向的渗流系数 (m/sec)
$k_z$	: z 方向的渗流系数 (m/sec)
$Q$	: 土单位体积上单位时间内的释水量 ( $m^3 / m^3 \cdot sec$ )
$\Theta$	: 体积含水率
$t$	: 时间 (sec)

这个方程式的含义是指土体内任意位置、任意时间内微小体积上的释水量的变化量等于体积含水率的变化率。简单的说就是x、y、z方向的流量变化率加上外部作用的流量等于随时间变化的体积含水率的变化率。

上式体现的是非稳定状态的渗流方程式。在稳定状态下，微小体积上的释水量保持恒定与时间无关，所以将上面方程式的右边设为零则可以得到如下基本方程。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial H}{\partial z}\right) + Q = 0 \quad (1.2.2)$$

体积含水率的变化依赖于应力状态的变化和土本身的特性。

饱和条件和非饱和条件的应力状态可用  $(\sigma - p_a)$  和  $(p_a - p_w)$  两个参数描述。其中， $\sigma$  为总应力， $p_a$  为孔隙大气压， $p_w$  为孔隙水压。

SoilWorks的渗流分析是基于总应力恒定的条件，即土体本身没有加载或者卸载发生。因此非

稳定状态流动过程中孔隙大气压是恒定的，即  $(\sigma - p_a)$  是恒定的，对于体积含水率的变化没有任何影响。所以体积含水率的变化只依赖于  $(p_a - p_w)$  应力状态的变化，因为  $p_a$  是恒定的，所以体积含水率的变化只是孔隙水压的函数。

体积含水率的变化与应力状态和土的孔隙水压的变化相关，其关系公式如下。

$$\partial\Theta = m_w \partial u_w \quad (1.2.3)$$

其中，  
 $m_w$  : 含水率曲线的斜率 ( $1/m$ )  
 $u_w$  : 压力水头 ( $m$ )

另外，总水头为压力水头和位置水头之和，公式如下。

$$H = \frac{p_w}{\gamma_w} + y \quad (1.2.4)$$

其中，  
 $H$  : 总水头 ( $m$ )  
 $p_w$  : 孔隙水压 ( $N/m^2$ )  
 $\gamma_w$  : 水的容重 ( $N/m^3$ )  
 $y$  : 标高 ( $m$ )

式(1.2.4)也可以表述如下。

$$u_w = (H - y) \quad (1.2.5)$$

将式(1.2.5)代入式(1.2.3)，可得如下公式。

$$\partial\Theta = m_w \partial (H - y) \quad (1.2.6)$$

将式(1.2.6)代入式(1.2.1)，可以整理为如下形式的微分方程。



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) + Q = m_w \frac{\partial (H - y)}{\partial t} \quad (1.2.7)$$

如果标高一定，则对于时间的y的导函数为零，则可得如下公式。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) + Q = m_w \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.2.8)$$

体积含水率  $\Theta$  是指水的体积占整个体积的比率，体积含水率也可以用饱和度和有效孔隙率的关系表述如下。

$$\begin{aligned} S_w n &= \frac{V_w V_v}{V_v V} \\ &= \frac{V_w}{V} = \Theta \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

其中，  
 $S_w$  : 饱和度  
 $n$  : 有效孔隙率  
 $V_v$  : 孔隙的体积

式(1.2.1)右侧为体积含水率的微分项，无法与左侧的水头微分项对应，因此将右侧重新按水头的微分来整理，可得如下公式。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + Q = \frac{\partial}{\partial H} (S_w n) \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.2.10)$$

将式(1.2.10)右侧的第一项展开整理可得式(1.2.11)。

$$\frac{\partial}{\partial H} (S_w n) = S_w \frac{\partial n}{\partial H} + n \frac{\partial S_w}{\partial H} \quad (1.2.11)$$

式(1.2.11)右边的第一项是指饱和和地基的随水头变化而发生的孔隙率变化以及由此发生的释水量，对于不饱和状态不考虑此项变化，即意味着只有在  $S_w = 1$  的饱和状态下才会考虑该项。

可用贮水率  $S_s$  (单位面积、单位厚度的含水层在水头降低一个单位时释放的水量) 表示如下。

$$\frac{dn}{dH} = \frac{1}{V} \frac{dV_w}{dH} = S_s \quad (1.2.12a)$$

$$S_s = \rho g (\alpha + n c_w) \quad (1.2.12b)$$

其中,  $\alpha$  : 含水层的压缩系数

$c_w$  : 水的压缩系数

式(1.2.11)右边的第二项是指随水头变化而发生的饱和度的变化。

将式(1.2.9)和(1.2.10)代入(1.2.11)该项可得如下公式。

$$\frac{\partial \Theta}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} (n S_w) = S_w \frac{\partial n}{\partial H} + n \frac{\partial S_w}{\partial H} = S_w S_s + n \frac{\partial S_w}{\partial H} \quad (1.2.13)$$

因此, 将式(1.2.13)代入到式(1.2.1)可以得到既考虑了贮水率又考虑了饱和度的方程。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + Q = \left( S_w S_s + n \frac{\partial S_w}{\partial H} \right) \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.2.14)$$

其中, 对饱和土  $S_w = 1$ , 对非饱和土右边第2项取  $\frac{\partial \Theta}{\partial H}$ 。



# 有限元方程

## 2.1 有限元方程

程序中适用于渗流分析的有限元单元为平面单元，基本上和平面应变单元相同。结构分析中的节点自由度为竖向和水平向的位移，而渗流分析中的节点自由度为水头，以此来描述流量。

渗流分析中同样可以使用三节点、四节点、六节点、八节点的单元，各种单元的形函数如下。

### ■ 3节点三角形平面单元

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta$$

### ■ 4节点四边形平面单元

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

### ■ 6节点三角形平面单元

$$N_1 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \quad N_2 = \xi(2\xi - 1), \quad N_3 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_4 = 4\xi(1 - \xi - \eta), \quad N_5 = 4\xi\eta, \quad N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

### ■ 8节点四边形平面单元

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi + \eta)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

各节点的自由度为水头，水头的变化量可通过对形函数进行微分得到，如式(2.1.1)所示。

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (2.1.1)$$

使用伽辽金加权残差法得到有限元方程如下。

$$\int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}) dV \mathbf{H} + \int_V (\lambda \mathbf{N}^T \mathbf{N}) dV \mathbf{H}_t = q \int_A (\mathbf{N}^T) dA \quad (2.1.2)$$

其中，

- B** : 水力梯度(或叫水力坡降)矩阵
- C** : 单元的渗流系数矩阵
- H** : 节点水头向量
- N** : 插值函数向量
- $q$  : 单元边上的单位流量
- $\lambda$  : (( $= m_w$ ))非稳定状态下的贮水相关项
- H<sub>t</sub>** : ( $= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ ) 随时间变化的水头

SoilWorks中对于二维分析，认为所有单元的厚度相同，因此上式可以重新整理如下。

$$b \int_A (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}) dA \mathbf{H} + b \int_A (\lambda \mathbf{N}^T \mathbf{N}) dA \mathbf{H}_t = qb \int_L \mathbf{N}^T dL \quad (2.1.3)$$

因为所有单元厚度  $b$  相同，所以可以转化为对面积的积分，而对于面积的积分就是从一节点到另一个节点的距离进行积分。

将有限元方程进行简化后可以表述如下。

$$\mathbf{K} \mathbf{H} + \mathbf{M} \mathbf{H}_t = \mathbf{Q} \quad (2.1.4)$$

其中，

- $\mathbf{K} = b \int_A (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}) dA$  : 单元特性矩阵
- $\mathbf{M} = b \int_A (\lambda \mathbf{N}^T \mathbf{N}) dA$  : 质量矩阵

$$\mathbf{Q} = qb \int_L \mathbf{N}^T dL \quad : \text{流量向量}$$

式(2.1.4)为非稳态渗流分析的基本方程。稳态渗流分析中因为水头不是时间的函数，所以可以将  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{H}}_r$  项去掉，得到简化的有限元方程如下。

$$\mathbf{KH} = \mathbf{Q} \quad (2.1.5)$$

## 2.2 时间积分

非稳态渗流分析的有限元方程的解是时间函数，如果假定在时间  $t_i$  对应的水头  $\mathbf{H}_0$  和时间  $t_{i+1}$  对应的水头  $\mathbf{H}_1$  分别满足式(2.1.4)的话，则可得如下公式。

$$\mathbf{K}\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}\mathbf{H}_{0,t_i} = \mathbf{Q}_0 \quad (2.2.1a)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}\mathbf{H}_{1,t_i} = \mathbf{Q}_1 \quad (2.2.1b)$$

将式(2.2.1)分别乘以  $\omega$  和  $1-\omega$  后重新整理可以得到式(2.2.2)。

$$\mathbf{K}[\omega\mathbf{H}_1 + (1-\omega)\mathbf{H}_0] + \mathbf{M}[\omega\mathbf{H}_{1,t_i} + (1-\omega)\mathbf{H}_{0,t_i}] = \omega\mathbf{Q}_1 + (1-\omega)\mathbf{Q}_0 \quad (2.2.2)$$

式(2.2.2)是随时间变化的水头，将该式适用到式(2.2.2)，可以得到由  $\mathbf{H}_0$ 、 $\mathbf{H}_1$  构成的式(2.2.4)。

$$\omega\mathbf{H}_{1,t_i} + (1-\omega)\mathbf{H}_{0,t_i} = \frac{\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_0}{\Delta t} \quad (2.2.3)$$

$$(\omega\Delta t\mathbf{K} + \mathbf{M})\mathbf{H}_1 = \Delta t\{(1-\omega)\mathbf{Q}_0 + \omega\mathbf{Q}_1\} + (\mathbf{M} - (1-\omega)\Delta t\mathbf{K})\mathbf{H}_0 \quad (2.2.4)$$

其中，

- $\Delta t$  : 时间增量
- $\omega$  : 处于0和1之间的系数
- $\mathbf{H}_1$  : 时间增量结束时的水头
- $\mathbf{H}_0$  : 时间增量开始时的水头
- $\mathbf{Q}_1$  : 时间增量结束时的节点流量
- $\mathbf{Q}_0$  : 时间增量开始时的节点流量
- $\mathbf{K}$  : 单元特性矩阵
- $\mathbf{M}$  : 单元质量矩阵

式(2.2.4)可以根据积分参数  $\omega$  的大小区分为以下几种不同的方法。

$\omega=0.0$  : 向前差分法(forward difference method)

$\omega=0.5$  : 克兰克-尼科尔森法(Crank-Nicolson method)

$\omega = 2/3$  : 伽辽金法(Galerkin method)

$\omega = 1.0$  : 向后差分法(backward difference method)

其中, 克兰克-尼克尔森法收敛计算中采用二阶收敛方法, 因其收敛较好在数值分析中使用较为广泛。但是如果时间增量与空间增量平方的比值过大时(大于1/2), 不仅计算时间较长而且会产生振荡或衰减, 因此要注意确定适当的时间增量。当需要使用较大的时间步长大时, 一般可采用数值精确度较差的向后差分法计算, 这样即可以保证稳定, 又避免了解的振荡。Soil Works中使用的是  $\omega = 1.0$  时的向后差分法。

非稳态有限元方程中  $\omega$  为1.0, 所以可得如下公式。

$$(\Delta t \mathbf{K} + \mathbf{M}) \mathbf{H}_1 = \Delta t \mathbf{Q}_1 + \mathbf{M} \mathbf{H}_0 \quad (2.2.5)$$

如式(2.2.5)所示, 为了计算时间增最终阶段的水头, 需要首先知道开始时间的水头, 即非稳态分析需要知道初始条件。Soil Works中使用稳态分析的结果作为非稳态分析的初始条件。

## 2.3 分析结果

利用通过渗流分析得到的各节点的水头，分别计算每个单元的水力梯度和达西速度，再将其转换为节点的结果输出。另外，如果定义了非饱和土的特性，考虑体积含水率和渗流系数的变化进行分析时，还可以得到体积含水率的和渗流系数的的变化结果。

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \end{Bmatrix} = \mathbf{TBH} \quad (2.3.1)$$

其中，

$i_x$  :  $x$  方向水力梯度

$i_y$  :  $y$  方向水力梯度

$\mathbf{T}$  : 将积分点的结果通过插值计算转换为节点结果的插值矩阵

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \mathbf{TCBH} \quad (2.3.2)$$

其中，

$v_x$  :  $x$  方向速度

$v_y$  :  $y$  方向速度





# 非线性渗流

## 3.1 概要

渗流分析中的非线性效应主要来自材料的非饱和土特性和边界条件的非线性两种情形。

非饱和土特性导致的非线性效应主要体现在渗流系数的变化、贮水率的变化以及两种特性同时变化的情形，这部分内容请参见关于材料的说明手册。

下面介绍渗流边界条件。

## 3.2 边界条件

### 3.2.1 渗流边界函数

此功能用于设置随时间变化的边界条件。非稳态分析时需要设置渗流边界，具体可以举例如下。

- ✓ 一年为周期的灌溉渠的水位变化
- ✓ 水库的水位变化
- ✓ 季节性降雨引起的地表雨水的流入和流出
- ✓ 井水泵的抽运量的变化

比如，只在夏季使用的灌溉渠在灌溉工作开始时水位较低，随着灌溉量的增加需要供应充足的水，这个过程中水位逐渐增加直至达到最高。后期灌溉量减少直至冬季到来，渠内的水位会逐渐降低直至为零。

下图所示为应用于非稳态分析的灌溉渠的非线性边界函数。

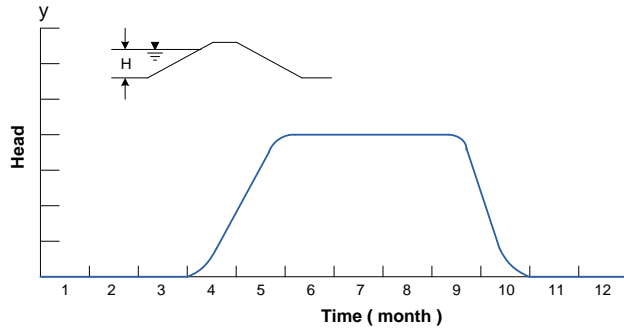


图 3.2.1 灌溉渠的边界函数

### 3.2.2 渗流面边界

对于某些渗流状态，根据流动的过程，边界条件也会变化。举个典型的例子，均质的大坝会向下游面发生渗流，但与下游面相交的浸润面的位置是未知的。因此，要通过反复迭代计算来确定渗流边界。

对于需要通过计算重新判断的边界条件上的所有节点，需要通过“根据渗流条件重新确定边界”功能将其设置为“再分析节点”。计算所有节点的水头后，如果有一个节点的计算水头大于节点的位置水头(即孔隙水压大于零)，就会重新确定再分析节点。

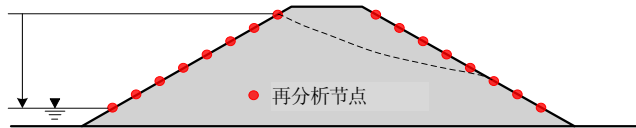


图 3.2.2 典型的再分析节点的设置区域

对再分析节点进行修正的方法有两种，一种是使用最大压力的方法，一种是最小高度的方法。最小高度的方法是将再分析节点设置成与最小高度相同，并为了下一步计算将水头设置为与高度(z坐标)相同。最大压力的方法是将再分析节点的水头设置为与最大的正压力水头相同，并为了下一步计算将水头设置为与高度(z坐标)相同。

至于选择哪种方法没有明确的规定。可根据预想的流动形态，选择某种方法甚至三种方法都使用，以便得到较为合适的结果。



图 3.2.3 潜在渗流面的设置方法

如前面的图3.2.2所示，坝体的斜坡斜率一定时，浸润面肯定是从下游斜坡最低的位置开始的，所以应由下向上随着标高重新界定渗流边界。当水位急剧下降时，上游面和下游面都要适用最小高度的方法重新分析边界。

如下图3.2.4所示，坝体下游斜坡的斜率发生变化时，这种情形比起标高最低的B点，先修正A点计算会更合理。所以此时应采用最大压力的方法进行分析。

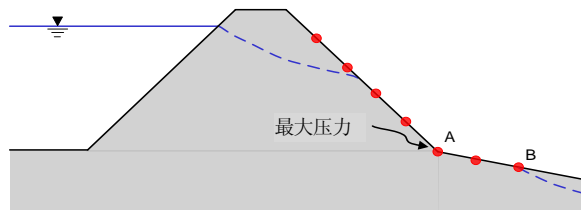


图 3.2.4 可按最大压力修正的情形

### 3.2.3 降雨分析用的流量-水头转换功能(面流量>渗流系数时, 总水头=位置水头)

考虑降雨时, 地表的边界条件可以使用降雨强度定义, 一般将相当于降雨强度的流量强制赋予给地表。当地表吸纳降雨的能力大于降雨强度时, 土层将吸纳全部雨水, 此时分析与实际相符。但是当地表吸纳降雨的能力小于降雨强度时, 有部分雨水将会沿地表流动, 此时如果将地表的边界还是使用相当于降雨强度的流量, 分析结果将于实际不符。

当降雨强度大于地表面吸纳降雨的能力时, 地表面的边界相当于具有饱和状态时的水位, 此时将边界条件转换为水位条件更合适一些。

如3.2.5所示, 在Soilworks的面流量定义中提供了“面流量>渗流系数时, 取总水头=位置水头”的功能选项。勾选此项时, 当在面流量中输入的降雨强度 $q$ 值大于地表的吸纳能力 $K_{sat}$  (输入的初始渗流系数)时, 原来的流量边界(降雨吸纳边界)将自动转换为水位条件。该功能不仅在降雨分析中非常方便实用。

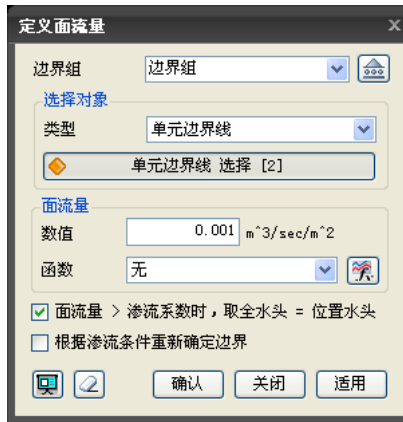


图3.2.5 基于地基吸纳能力的降雨强度边界条件转换功能

降雨分析时的注意事项如下：

- 当地表面有沥青、混凝土或环氧树脂等不透水铺装时，不能使用降雨边界。
- 用该选项并不能准确模拟洪水的水位超过地表的情况。

### 3.2.4 水位变化分析用的水头-流量转换功能(总水头<位置水头时，取流量=0)

水库或大坝的水位水位下降时，露出部分的孔隙水压将消散。在SoilWorks的节点水头定义中提供了“总水头<位置水头时，取流量=0”功能选项，可以方便的模拟这种状况。

另外，水位骤然变化时，分析模型会产生吸力，渗流甚至会流过大坝。该选项可以防止这种情况发生。

对于季节性降雨量差比较有规律的地区，用该选项模拟水位的变化非常方便，可以通过定义随时间变化的水头模拟。

需要注意的是该选项仅用于水位变化引起的水向地基内部渗流的情况，当水向外部流出时不能勾选此项。



## 第7部分

---

# 动力分析

### 动力分析

第1章 特征值分析

第2章 阻尼

第3章 反应谱分析

第4章 时程分析

第5章 等效线性分析





# 动力分析

## ○ 动力分析 / 001

### ○ 第1章 特征值分析 / 005

- 1.1 特征值分析 / 005
- 1.2 子空间迭代法 / 012
- 1.3 兰佐斯法 / 013

### ○ 第2章 阻尼 / 017

- 2.1 概要 / 017
- 2.2 比例阻尼 / 018

### ○ 第3章 反应谱分析 / 021

### ○ 第4章 时程分析 / 027

- 4.1 概要 / 027
- 4.2 振型叠加法 / 028
- 4.3 直接积分法 / 030

### ○ 第5章 等效线性分析 / 035

- 5.1 一维自由场分析 / 035
- 5.2 二维等效线性分析 / 040

5.2.1 概要 / 040

5.2.2 运动方程 / 041

5.3 传递边界条件 / 044



# 动力分析

地基与地下结构的动力荷载可能来自地震、动力机器、打入桩、爆破等。这些荷载对地基与地下结构的影响和特点如下：

- 地震：是影响最大的动力荷载，地震会使结构基础发生沉降、地面结构倾斜甚至倒塌、地基液化造成地基承载能力失效。地震荷载的方向、地震发生的时间和地点目前都无法准确预测。
- 动力机器：主要由机器的往返运动或旋转运动发生，具有简谐振动特点。
- 打入桩施工或爆破：是施工时在极短时间内施加巨大冲击能量的冲击荷载。冲击荷载也像地震荷载一样属于无周期性的荷载类型。



图A.1 地震灾害照片

为了确定设计反应谱函数、地基的动力应力-应变关系以及发生地震时作用于地下结构的地震力，需进行地基的地震响应分析。岩石露头的地震波特性与原岩的地震波特性几乎类似，但是软土地基或深地基的地表面处的地震波特性与原岩会有很大差异。特别是软土地基上面的结构物的动力响应，如果考虑“地基-结构相互作用”其结果会有很大的变化。在剪切应变为 $10^{-6}$ 、剪切波速度大于1100m/sec的岩石上的结构物，一般来说可不考虑“地基-结构相互作用”的效果。

“地基-结构相互作用”的效果可分为以下两种情况，第一是结构体系的动力特性的变化。通常地基的刚度小于结构刚度，故结构的刚度和频率将变小。第二是辐射阻尼将会使结构的阻

尼增大。地基的叠层现象、地基特性、输入的地震波和结构的频率，都会影响“地基-结构相互作用”效果，因此当考虑“地基-结构相互作用”效果时，相对于直接采用固定边界条件的情况其分析结果或大或小。

地震时的“地基-结构相互作用”大体可分为“运动相互作用(kinematic interaction)”和“惯性相互作用(inertial interaction)”。

运动相互作用是指地基上有“无质量结构(massless structure)”时与地基上无任何结构时，两种情况下地基的地震动响应不同。运动相互作用受入射波散射运动、结构基础的形状和埋深等因素影响。含高频成分的入射波(incident wave)的波长较短会直接被结构基础吸收或反射；但含低频成分的入射波的波长较长将进入结构使结构发生运动；垂直入射的剪切波使结构发生“旋转运动”，运动相互作用引起的地基运动称之为“散射运动(scattering motion)”。另外，当结构建在地表面或结构基础埋深较浅时、或不考虑地面波时，可忽略运动相互作用效应。

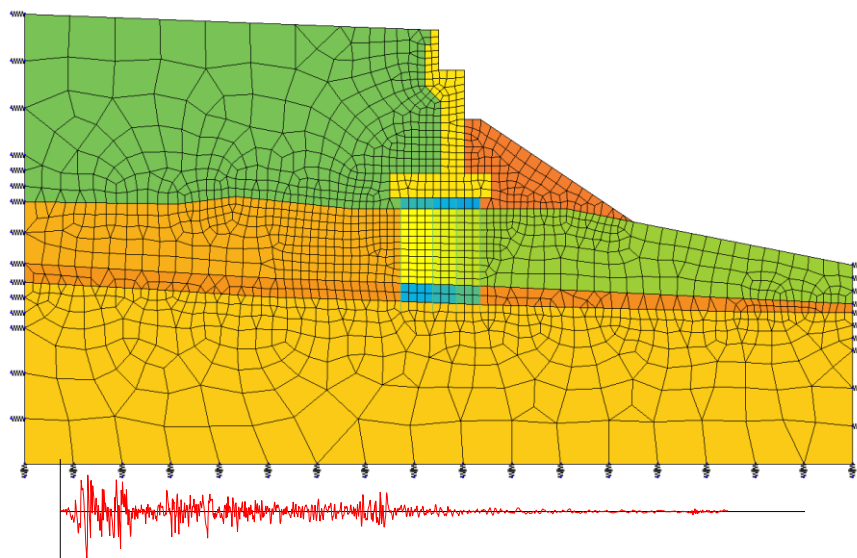
惯性相互作用是指地震波作用下结构发生振动时，结构因自身的质量会产生惯性力，惯性力产生的结构惯性动能重新传给远场土(far field soil)使地基发生“辐射运动(radiation motion)”的现象。当结构和近场地基的刚度差越大时，惯性相互作用越明显。因此当刚度较大的结构建在软土地基上时，将发生非常大的惯性相互作用。

地基-结构相互作用的分析方法，可分为“子结构法”和“直接法”。子结构法的计算步骤如下：

- 步骤1：使用自由场分析结果，考虑地基特性和基础的影响，确定作用于地基-结构界面的动力荷载。
- 步骤2：确定地基-结构的分界面上的半无限地基的动力刚度和阻尼，即确定地基的阻抗函数。
- 步骤3：将步骤2中求得的地基的动力刚度和阻尼特性与上部结构特性结合，建立地基-结构系统的分析模型。将步骤1中求得的分界面上的地震动施加在结构上进行结构分析。

虽然子结构法不能准确考虑地基的非线性特性，但对于上述各步骤均可找到适当的分析方法，且对每个步骤的结果都可以进行评价和敏感度分析，相对于“直接法”分析方法较经济。

“直接法”又称整体法，将近场地基、基础、结构体系作为一个整体进行数值分析的方法，分析方法有有限元法和有限差分法。直接法相对于结构法来说，虽然分析时间较长，但是可以相对准确的考虑分界面的非线性协调条件、以及地基的非线性特性等。SoilWorks程序中提供了两种直接法，即时程分析方法和等效线性分析方法，两种方法均采用有限元法。



图A.2 桥台基础和地基的地震动力分析模型



# 特征值分析

特征值分析是计算地基和地下结构物的固有周期和振型形状的分析方法，可用于分析地震荷载作用下地基和地下结构的动力响应。利用振型的正交性特点，使用振型叠加法、反应谱分析法可非常方便的分析地基和地下结构的动力效应，因此计算振型用的特征值分析对于动力分析是非常重要的分析方法。

在SoilWorks中提供的特征值分析方法有“子空间迭代法”和“兰佐斯法”。对于子空间迭代法和兰佐斯法将在1.2节和1.3节中详细介绍。

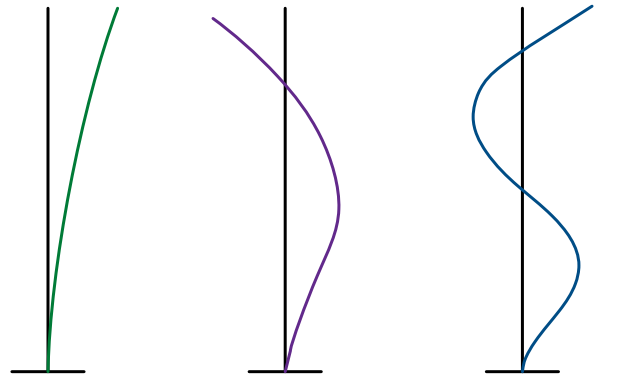
## 1.1 特征向量分析

在SoilWorks中计算无阻尼自由振动条件下的振型形状和固有周期的特征方程如下：

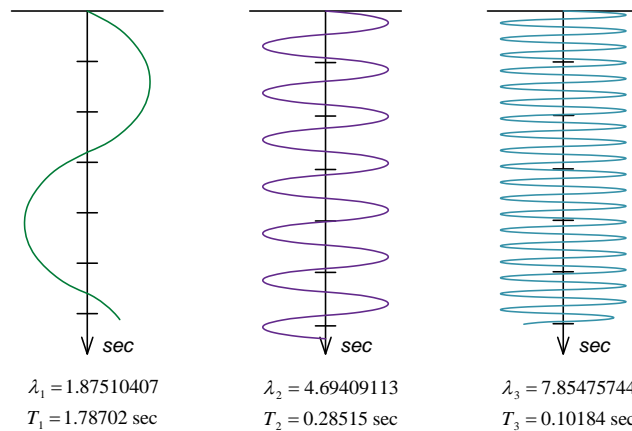
$$\mathbf{K}\Phi_n = \lambda_n \mathbf{M}\Phi_n \quad (1.1.1)$$

其中，

- K** : 地基或地下结构的刚度矩阵
- M** : 地基或地下结构的质量矩阵
- $\lambda_n$  : 第n阶振型特征值
- $\Phi_n$  : 第n阶振型的模态向量



(a) 振型形状



(b) 固有周期

图 1.1.1 等截面悬臂结构的振型形状和固有周期

特征值分析也叫自由振动分析，用于分析结构固有的动力特征。通过特征值分析得到的主要的结构动力特性有振型、自振周期、振型参与系数(Modal Participation Factor)等，它们由结构的质量和刚度所决定。

振型是结构自由振动(或变形)时的固有形状,按发生振型形状变形所需的能量(或力)由小到大顺序排列,分别为第一阶振型(基本振型)、第二阶振型、第n阶振型。图1.1.1是悬臂梁从低阶振型(用较少的能量实现的变形)到高阶振型的示意图。

自振周期是与振型对应的物体固有的性质,它表示结构在自由振动状态下,按该振型形状振动1次所需的时间。以下是求解单自由度体系的自振周期的方法。假设单自由度体系运动方程式中的荷载项和阻尼项为0,则方程式蜕化为自由振动方程式。

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku &= p(t) \\ m\ddot{u} + ku &= 0 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

其中 $u$ 是振动引起的位移,假设 $u = A\cos\omega t$ (其中 $A$ 是与初始位移相关的常量),则上面公式变为:

$$(-m\omega^2 + k)A\cos\omega t = 0 \tag{1.1.3}$$

上面公式恒等的条件是左面括号项为零,所以特征值如下:

$$\omega^2 = \lambda = \frac{k}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad T = \frac{1}{f} \tag{1.1.4}$$

其中

$\omega^2$	: 特征值
$\omega$	: 固有圆频率
$f$	: 固有频率
$T$	: 固有周期

某个振型的振型参与系数是该振型的影响与所有振型的影响的比值。

$$\tau_m = \frac{\sum M_i \phi_{im}}{\sum M_i \phi_{im}^2} \tag{1.1.5}$$

其中,

$\tau_m$	: 振型参与系数 (modal participation factor)
$m$	: 振型号 (mode number),



$M_i$  : i节点的质量

$\varphi_{im}$  : i节点的第m阶振型向量

一般抗震设计规范中会规定各振型的有效质量(effective modal Mass)之和应保证达到全部有效质量的90%以上。这是为了保证计算地震作用时包含足够的主要振型。

$$M_m = \frac{[\sum \varphi_{im} M_i]^2}{\sum \varphi_{im}^2 M_i} \quad (1.1.6)$$

其中,  $M_m$  : 各振型有效质量 (effective modal mass)

当节点的自由度被约束时, 它的质量虽然可以反映在总体质量中, 但是因为相应自由度的振型向量被约束, 所以其质量不能反映到有效质量中。因此要评价各个振型有效质量对总质量所占的百分比的时候, 输入了质量分量的节点在该分量方向的自由度不能被约束。

为了正确分析结构的动力反应, 模型必须准确输入与特征值计算密切相关的质量和刚度。结构分析中整个结构分解成很多个单元, 因此大部分的刚度分量都能体现出来; 但是结构构件的质量占总质量的比例很小, 所以正确把握没有作为结构构件包含到模型中的材料的质量, 并将其输入到模型中是非常重要的。

质量分量有3个平动质量分量(Translational Masses)和3个转动质量分量(Rotational Mass Moment of Inertia)。这里的转动质量是由旋转质量惯性引起的, 在抗震设计中地震是以地震加速度形式沿平动方向作用的, 所以旋转质量成分对抗震设计的动力反应没有直接影响, 但是如果结构是非对称(质量中心和刚度中心不一致), 则会产生一些扭转变形, 对动力反应会有间接影响。

质量成分的计算方法如下(参照表1.1.1)

$$\text{平动质量成分} : \int dm \quad (1.1.7)$$


$$\text{旋转质量惯性矩} : \int r^2 dm$$

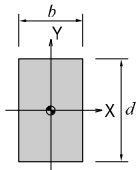
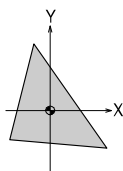
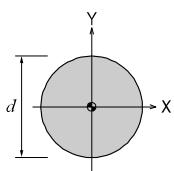
其中， $r$ ：是物体重心到微元重心的距离

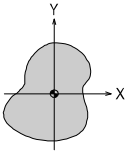
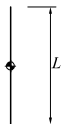
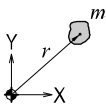
质量的单位等于重量除以重力加速度的单位([重量(时间<sup>2</sup>/长度)]), 旋转惯性矩的单位等于质量乘以长度平方的单位([重量(时间<sup>2</sup>/长度)x长度<sup>2</sup>)。若使用MKS或者English单位体系，质量是要输入重量除以重力加速度的值；若使用SI单位系，质量可以直接输入MKS单位系中使用的重量值，而弹性模量或荷载要在使用MKS单位系中使用的值上乘以重力加速度。

在SoilWorks程序，为了提高分析效率，采用的是集中质量法。质量数据可通过“主菜单>模型>荷载>节点质量”输入。

表1.1.1 质量数据的计算方法

$\rho$ ：单位面积质量 ：质量中心

截面形状	平动质量	旋转质量惯性矩
矩形截面 	$M = \rho bd$	$I_m = \rho \left( \frac{bd^3}{12} + \frac{db^3}{12} \right)$ $= \frac{M}{12} (b^2 + d^2)$
三角形截面 	$M = \rho \times \text{三角形面积}$	$I_m = \rho (I_x + I_y)$
圆形截面 	$M = \rho \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)$	$I_m = \rho \left( \frac{\pi d^4}{32} \right)$

<p>一般截面</p> 	$M = \rho \times \int dA$	$I_m = \rho(I_x + I_y)$
<p>线</p> 	$\rho_L = \text{单位长度质量}$ $M = \rho_L \times L$	$I_m = \rho_L \left( \frac{L^3}{12} \right)$
<p>质量偏心</p> 	<p>偏心质量 : m</p> $M = m$	<p>对质心的旋转质量</p> <p>惯性矩 : <math>I_o</math></p> $I_m = I_o + mr^2$

## 1.2 子空间迭代法

子空间迭代法是将构成子空间  $E_k$  的  $N_s$  个向量  $\mathbf{X}_k$  通过迭代计算使其收敛于特征向量  $[\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{N_s}]$  的方法。

迭代计算过程如下：

- (1) 取构成子空间  $E_1$  的  $N_s$  个初始向量  $\mathbf{X}_1$  构成初始矩阵  $\mathbf{Y}_0$ 。
- (2) 通过  $k$  次迭代计算获得新的向量矩阵，方法如下：

- 解线性方程  $\mathbf{K}\mathbf{Y}_k = \mathbf{M}\mathbf{X}_k$
- 刚度矩阵的映射(projection)  $\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{Y}_k^T \mathbf{K} \mathbf{Y}_k$
- 质量矩阵的映射(projection)  $\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{Y}_k^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_k$
- 解映射后的特征值  $\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{\Lambda}_{k+1}$

$$\mathbf{Q}_{k+1} = [\psi_1^* \ \psi_2^* \ \dots \ \psi_{N_s}^*]$$

$$\mathbf{\Lambda}_{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & & & \\ & \lambda_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{N_s}^* \end{bmatrix}$$

- 计算  $\mathbf{X}_{k+1} \quad \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{Y}_k \mathbf{Q}_{k+1}$

通过上述迭代计算使特征值  $\lambda_n^*$  和特征向量  $\mathbf{X}_k$  收敛于下面公式。

$$\lambda_m^* \rightarrow \lambda_m, \quad \mathbf{X}_k \rightarrow [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{N_s}] \tag{1.2.1}$$

当  $\mathbf{X}_k$  由  $N_s$  个数的向量组成时， $\mathbf{K}_k$  与  $\mathbf{M}_k$  的大小与迭代次数无关，直接取  $N_s \times N_s$ 。进行  $k$  次迭代后，求得的  $\lambda_m^{(k+1)}$  的收敛判断条件如下：

$$\left\| \frac{\lambda_m^{(k+1)} - \lambda_m^{(k)}}{\lambda_m^{(k+1)}} \right\| \leq \varepsilon \tag{1.2.2}$$

在SoilWorks采用的子空间迭代法，可设置  $\mathbf{X}_k$  的大小、最大迭代次数  $N_f$  以及式(1.2.2)的收敛容许误差  $\varepsilon$ 。程序中使用的子空间  $N_s$  见下式，其中  $N_{s_0}$  为用户输入的子空间数大小， $N_f$  是需要计算的特征值数量。

$$N_s = \max\{N_{s_0}, \min(2N_f, N_f + 8)\} \quad (1.2.3)$$

子空间迭代分析过程的最大迭代次数默认值为  $N_f = 20$ ，收敛误差容许值的默认值为  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-10}$ 。

### 1.3 兰佐斯法

兰佐斯迭代法是通过生成克雷洛夫(Krylov)子空间  $span(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k)$  过程中的三对角矩阵  $\mathbf{T}_k$  近似计算特征值的方法。为了提高计算效率使用平移逆转法将特征值  $\lambda_m$  转换为  $\lambda_m = \sigma + 1/\theta_m$ ，其中  $\sigma$  为第一振型的预想值。

使用平移逆转法的兰佐斯迭代计算过程如下：

(1) 假设初次计算时的块矢量初始值  $\mathbf{V}_1$

(2) 第  $k$  次迭代时的计算方程

- 计算质量矩阵与块向量的乘积	$\mathbf{U}_k = \mathbf{M}\mathbf{V}_k$
- 解线性方程	$(\mathbf{K} - \sigma\mathbf{M})\mathbf{W}_k = \mathbf{U}_k$
- 正交化	$\mathbf{W}_k^* = \mathbf{W}_k - \mathbf{V}_{k-1}\mathbf{B}_{k-1}^T$
- 计算 $\mathbf{C}_k$	$\mathbf{C}_k = \mathbf{V}_k\mathbf{M}\mathbf{W}_k^*$
- 正交化	$\mathbf{W}_k^{**} = \mathbf{W}_k^* - \mathbf{V}_k\mathbf{C}_k$
- 块向量正规化	$\mathbf{W}_k^{***} = \mathbf{V}_{k+1}\mathbf{B}_k$

SoilWorks程序中为了提高计算效率使用块兰佐斯法，计算过程中的三对角矩阵  $\mathbf{T}_k$  如下：

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1^T & & & & \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \mathbf{C}_{k-1} & \mathbf{B}_{k-1}^T & \\ & & & \mathbf{B}_{k-1}^T & \mathbf{C}_k & \end{bmatrix} \quad (1.3.1)$$

利用  $\mathbf{T}_k$  解方程  $\mathbf{T}_k \boldsymbol{\psi}_m^* = \theta_m^* \boldsymbol{\psi}_m^*$  并利用  $\lambda_m^* = \sigma + 1/\theta_m^*$  可得  $\lambda_m^*$ ， $\lambda_m^*$  是特征值的近似值。当  $\mathbf{V}_k$  的块大小是  $N_b$  时，随着迭代次数的增加  $\mathbf{T}_k$  的大小会增加  $N_b$ ， $\lambda_m^*$  会逐渐收敛于  $\lambda_m$ 。特征向量  $\boldsymbol{\phi}_m$  的近似值  $\boldsymbol{\phi}_m^*$  可按下面公式计算：

$$\boldsymbol{\phi}_m^* = [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \quad \mathbf{V}_3 \quad \dots \quad \mathbf{V}_k] \boldsymbol{\psi}_m^* \quad (1.3.2)$$

兰佐斯法的收敛判断条件如下：

$$\frac{\|\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_m^* - \lambda_m^* \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_m^*\|}{\|\mathbf{K}\|} \leq \varepsilon \quad (1.3.3)$$

其中， $\|\cdot\|$  表示是二阶范数，SoilWorks程序使用的收敛范数为  $\varepsilon = 2.22 \times 10^{-16}$ 。

SoilWorks程序中的兰佐斯计算方法，可通过两个频率  $f_1$ 、 $f_2$  就能确定所要计算的“关心范围”频率。在平移逆转法中，通过将预想特征值取为  $\sigma = (2\pi f_1)^2$ ，可将关心范围的频率反应进去。

根据  $f_1$  与  $f_2$  的关系，计算的特征值范围与顺序如图1.3.1所示。要计算的特征值数量为  $N_f$  时，根据  $f_1$  与  $f_2$  计算特征值的方法如下：

- $f_1 = f_2$  时：计算  $N_f$  个距离  $f_1$  较近的频率
- $f_1 < f_2$  时：在  $[f_1, f_2]$  范围里，计算  $N_f$  个距离  $f_1$  较近的频率
- $f_1 > f_2$  时：在  $[f_2, f_1]$  范围里，计算  $N_f$  个距离  $f_1$  较近的频率

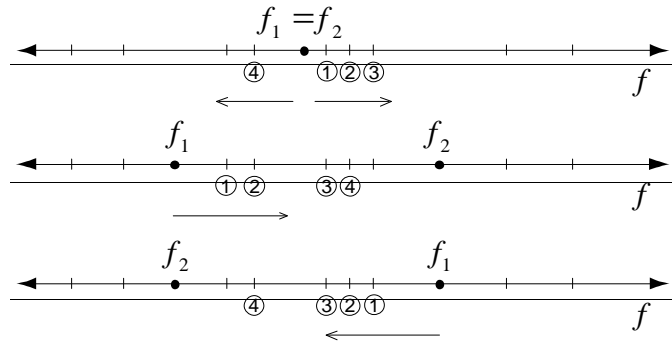


图 1.3.1 搜索特征值的方法

频率关心范围  $f_1$ 、 $f_2$  的默认值为： $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 1600$ 。



## 2.1 概要

动力分析中地基或地下结构的阻尼大体分为以下几种类型:

**A. 粘性阻尼 (Voigt类型、Maxwell类型)**

**B. 滞回阻尼(随时间变化的阻尼)**

**C. 摩擦阻尼**

(1) 内摩擦阻尼(材料阻尼)

(2) 外摩擦阻尼

(3) 滑动阻尼

**D. 耗散阻尼**

**E. 模态阻尼**

(1) 比例阻尼

✓ 质量比例型

✓ 刚度比例型

✓ 瑞利型

✓ 柯西型

(2) 非比例阻尼

✓ 能量比例型

一般数值分析中经常使用的是模态阻尼，模态阻尼可对不同固有频率赋予不同的阻尼，一般分为比例阻尼和非比例阻尼。

在Soilworks中提供比例阻尼中的质量比例型、刚度比例型和瑞利阻尼。



## 2.2 比例阻尼

质量比例型阻尼是假设阻尼矩阵与结构的质量成比例。刚度比例型阻尼因为无法直接表现耗散阻尼效果(围岩对动能的释放)，所以假定阻尼与刚度成比例有可能夸大高阶振型的阻尼效果。

瑞利阻尼为了减少刚度比例型阻尼在高阶振型上的不确定性，用质量比例型阻尼和刚度比例型阻尼之和作为阻尼矩阵。

比例阻尼矩阵C使用柯西(Caughey)提出的公式：

$$C = M \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} a_j (M^{-1}K)^j \right\} \quad (2.2.1)$$

其中， $j, N$  : 节点自由度(振型阶数)

公式(2.2.1)中  $M^{-1}K$  根据如下无阻尼体系的自由振动公式计算而得。

$$M\{\ddot{y}\} + K\{y\} = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\text{假设: } \{y\} = \{u\}e^{i\omega x} \quad (2.2.3)$$

代入公式(2.2.2)可得，

$$(-\omega^2 M + K)\{u\} = \{0\} \quad (2.2.4)$$

最终得到  $M^{-1}K = \omega^2$ ，其中  $\omega^2$  的数量与振型数量相同，所以使用  ${}_s\omega^2$  来表示。

将  $M^{-1}K$  代入公式(2.2.1)，前后分别乘以  $\{ {}_s u \}^T$  与  $\{ {}_s u \}$ ，可得

$$\{ {}_s u \}^T C \{ {}_s u \} = {}_s C = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \cdot {}_s \omega^{2j} \cdot \{ {}_s u \}^T M \{ {}_s u \} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \cdot {}_s \omega^{2j} \cdot {}_s M \quad (2.2.5)$$

s阶振型的阻尼常数  ${}_s h$  可用下列公式表示。

$${}_s C = 2 {}_s h \cdot {}_s \omega \cdot {}_s M \quad (2.2.6)$$

公式(2.2.5)、公式(2.2.6)中的阻尼常数  ${}_s h$  :

$$\begin{aligned} {}_s h &= \frac{{}_s C}{2 {}_s \omega \cdot {}_s M} = \frac{1}{2 {}_s \omega} \sum a_j \cdot {}_s \omega^{2j} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{{}_s \omega} + a_1 \cdot {}_s \omega + a_2 \cdot {}_s \omega^3 + \cdots + a_{N-1} \cdot \omega^{2N-3} \right), \quad s = I - N \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

使用上述公式可得对应N个振型的阻尼常数。

质量比例型、刚度比例型的阻尼常数及阻尼矩阵如下：

$${}_s h = \frac{a_0}{{}_s \omega}, \quad C = a_0 M \quad : \quad \text{质量比例型} \quad (2.2.8)$$

$${}_s h = \frac{a_1 \cdot {}_s \omega}{2}, \quad C = a_1 M \quad : \quad \text{刚度比例型} \quad (2.2.9)$$

瑞利阻尼的阻尼常数及阻尼矩阵如下：

$${}_s h = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{{}_s \omega} + a_1 \cdot {}_s \omega \right), \quad C = a_0 M + a_1 K \quad (2.2.10)$$

其中,

$$a_0 = \frac{2 \cdot {}_1 \omega \cdot {}_2 \omega ({}_1 h \cdot {}_2 \omega - {}_2 h \cdot {}_1 \omega)}{({}_2 \omega^2 - {}_1 \omega^2)}$$

$$a_1 = \frac{2({}_2 h \cdot {}_2 \omega - {}_1 h \cdot {}_1 \omega)}{({}_2 \omega^2 - {}_1 \omega^2)}$$



## 反应谱分析

SoilWorks的反应谱分析中地震荷载最常用下考虑地基或地下结构的动力平衡方程如下：

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = -[M]w_g(t) \quad (3.1)$$

其中，

- $[M]$  : 质量矩阵
- $[C]$  : 阻尼矩阵
- $[K]$  : 刚度矩阵
- $w_g$  : 加速度

$u(t)$ 、 $\dot{u}(t)$ 、 $\ddot{u}(t)$  分别为相对位移、速度、加速度。

反应谱分析方法是把多自由度体系假设为单自由度体系的复合体，将通过数值积分求出的任意周期(或者频率)对应的最大反应值(加速度、速度、位移)再进行组合得到最终分析结果的方法。

反应谱分析方法的分析过程是先求出每个振型对应的最大反应值，然后用适当的组合方法，预测出最大反应值。例如在抗震分析中对任意振型、任意自由度的位移和惯性力可用以下公式计算。

$$d_{xm} = \Gamma_m \varphi_{xm} S_{dm}, \quad F_{xm} = \Gamma_m \varphi_{xm} S_{am} W_x \quad (3.2)$$

其中，

- $\Gamma_m$  : 第m阶振型的振型参与系数
- $\varphi_{xm}$  : 任意位置(x)的第m阶振型向量
- $S_{dm}$  : 第m阶振型的归一化谱位移(normalized spectral displacement)
- $S_{am}$  : 第m阶振型的归一化谱加速度(normalized spectral acceleration)
- $W_x$  : 任意位置(x)的质量

在结构分析程序中，一般用线性插值的方法计算任意周期对应的反应谱数据，因此在谱曲线

变化大的区域要尽可能使用细化的数据(参照图3.1)。输入的谱数据的周期范围一定要在特征值分析计算出的最小/最大周期范围内。

SoilWorks中使用的反应谱数据可选择国内建筑、公路、铁路等行业的设计反应谱，根据规范要求输入相应的参数，例如设计地震分组、场地类别、设防烈度、设计特征周期、重要性系数等数据，程序将根据输入的参数自动生成设计谱数据，所以使用起来非常方便。

SoilWorks可以做沿整体坐标系下X-Z平面内任意方向和Z方向反应谱分析，振型组合方法可以使用完全二次组合(CQC)方法及平方和开平方法(SRSS)等方法。

振型组合方法如下：

✓ **SRSS(开方和开平方法)**

$$R_{\max} = [R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_n^2]^{1/2} \quad (3.3)$$

✓ **ABS(绝对值总和法)**

$$R_{\max} = |R_1| + |R_2| + \dots + |R_n| \quad (3.4)$$

✓ **CQC(完全二次组合法)**

$$R_{\max} = \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i \rho_{ij} R_j \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

$$\text{其中, } \rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r)^2 + 4\xi^2r(1+r)^2},$$

$$r = \frac{\omega_j}{\omega_i},$$

$R_{\max}$  : 最大响应值

$R_i$  : 任意第*i*阶振型的最大响应值

$r$  : 第j阶振型与第i阶振型的固有频率比值

$\xi$  : 阻尼比

上式(3.5)中, 若 $i=j$ ,  $\rho_{ij}=1$ 。若阻尼比 $\xi=0$ , 则CQC和SRSS组合方法的结果相等。

上述几种组合方法中, 使用ABS方法算出的组合值最大, 使用SRSS方法算出的组合值在各固有频率很接近的时候, 有过大或过小的倾向。所以, 虽然以前主要使用SRSS方法, 但最近开始越来越多地使用可以考虑振型之间的概率相关的CQC方法。

例如, 对于一个阻尼比为0.05, 有3个自由度的结构的自振频率和不同振型的位移值如下。下面比较了CQC和SRSS方法的结果。

✓ 固有频率

$$\omega_1 = 0.46, \omega_2 = 0.52, \omega_3 = 1.42$$

✓ 各振型最大位移:  $D_{ij}$  (第j振型的i自由度的位移量)

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} 0.036 & 0.012 & 0.019 \\ -0.012 & 0.014 & -0.005 \\ 0.049 & 0.002 & -0.017 \end{vmatrix}$$

✓ 采用SRSS方法计算各自由度对应的响应值

$$R_{\max} = [R_1^2 + R_2^2 + R_3^2]^{1/2} = \{0.042 \quad 0.046 \quad 0.052\}$$

✓ 采用CQC方法的结果

$$\rho_{12} = \rho_{21} = 0.3985$$

$$\rho_{13} = \rho_{31} = 0.0061$$

$$\rho_{23} = \rho_{32} = 0.0080$$

$$R_{\max} = \left[ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + 2\rho_{12}R_1R_2 + 2\rho_{13}R_1R_3 + 2\rho_{23}R_2R_3 \right]^{1/2}$$

$$= \{0.046 \quad 0.041 \quad 0.053\}$$

比较上述两个结果：对第一自由度分量来说，使用SRSS方法比使用CQC方法结果偏小，对第二自由度分量则偏大。这表明当自振频率取值相对接近时，SRSS方法算出的结果有可能偏大，也有可能偏小。

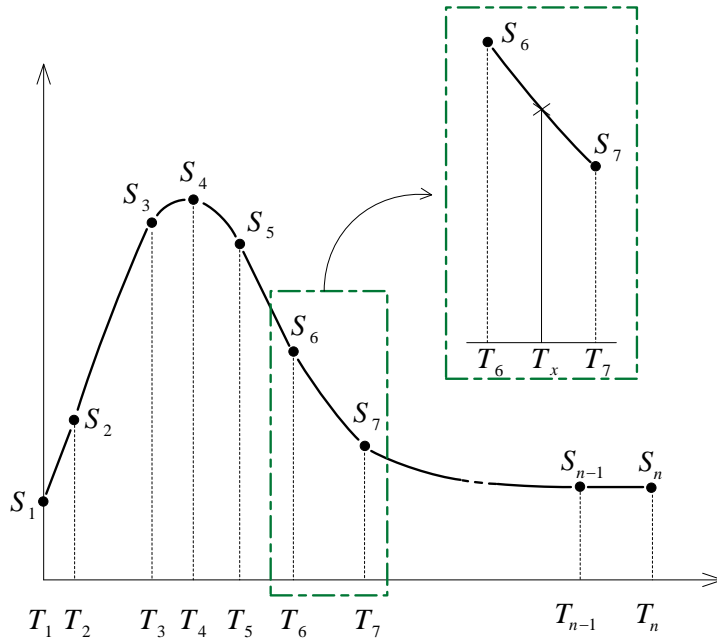


图 3.1 反应谱曲线及任意周期点对应的反应谱值的取值方法示意图



# 时程分析

## 4.1 概要

SoilWorks的时程分析的动力平衡方程如下：

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = p(t) \quad (4.1.1)$$

其中，

$[M]$	: 质量矩阵
$[C]$	: 阻尼矩阵
$[K]$	: 刚度矩阵
$p(t)$	: 动力荷载

$u(t)$ 、 $\dot{u}(t)$ 、 $\ddot{u}(t)$ 分别为相对位移、速度、加速度。

时程分析是当地基和地下结构受动力荷载作用时，计算任意时刻的地基和地下结构效应(位移、内力等)的过程。SoilWorks程序中时程分析方法有振型叠加法和直接积分法。

下面说明振型叠加法和直接积分法的基本概念和输入数据时的注意事项。

## 4.2 振型叠加法

振型叠加法是指用相互正交的位移向量的线性组合计算结构位移的方法，该方法的前提条件是阻尼矩阵可以用质量矩阵和刚度矩阵的线性组合表示，阻尼矩阵公式如下。

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.2.1)$$

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{q}(t) + \Phi^T K \Phi q(t) = \Phi^T F(t) \quad (4.2.2)$$

$$m_i \ddot{q}_i(t) + c_i \dot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = P_i(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (4.2.3)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^m \Phi_i q_i(t) \quad (4.2.4)$$

$$q_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[ q_i(0) \cos \omega_{Di} t + \frac{\xi_i \omega_i q_i(0) + q_i(0)}{\omega_{Di}} \sin \omega_{Di} t \right] + \frac{1}{m_i \omega_{Di}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{Di} (t-\tau) d\tau \quad (4.2.5)$$

其中，

- $\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ ,
- $\alpha, \beta$  : 瑞利系数
- $\xi_i$  : 第 i 阶振型的阻尼比
- $\omega_i$  : 第 i 阶振型的固有周期
- $\Phi_i$  : 第 i 阶振型的向量
- $q_i(t)$  : 第 i 阶振型的单自由度方程的解

如公式(4.2.4)所示，时程分析的位移由振型向量与单自由度方程的解的乘积组成，振型的数量将直接影响结果的准确性。

振型叠加法是结构分析程序中使用最多的方法之一，对大型地基或地下结构的线性动力分析来说是一个很有效的方法。但是其缺点是不适合于非线性动力分析，另外对于装有特殊阻尼器的结构，因为这些结构阻尼无法表示为刚度和质量的线性组合，因此也不能使用线性叠加



法。

采用振型叠加法时需要输入的数据和注意事项如下：

- ✓ 分析时间(或计算次数)：想要分析的时间长度(或计算次数)
- ✓ 分析时间间隔：分析时使用的时间间隔，对分析的准确性有相当大的影响。时间间隔的大小与结构自振振型的周期、荷载的周期是有密切联系的。时间间隔若取值不当的时候会产生不准确的结果。一般来说，时间间隔宜取不大于所要考虑的最高阶振型周期的1/10，并且分析用时间间隔不能大于荷载的时间间隔。

$$\Delta t = \frac{T_p}{10} \quad (4.2.6)$$

其中， $T_p$ ：所要考虑的最高阶振型的周期

- ✓ 不同振型的阻尼比(或瑞利系数)：决定结构阻尼所必需的参数，可输入所有振型的阻尼比或各个振型的阻尼比。
- ✓ 动力荷载：加在结构的节点或基础上的动力荷载，是时间的函数。函数要充分表现荷载的变化。任意时间的荷载值取输入的荷载的线性插值。

### 4.3 直接积分法

直接积分法是将时间作为积分参数求解动力平衡方程的方法。该方法没有平衡方程的形态变化，对各个时间阶段直接进行积分来求解，可采用的积分方法也很多。

SoilWorks中使用收敛性比较好的纽玛克法(newmark)做直接积分，其基本假定和积分方法如下：

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + [(1-\delta) {}^t\ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{u}]\Delta t \quad (4.3.1)$$

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) {}^t\ddot{u} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{u}\right]\Delta t^2 \quad (4.3.2)$$

将公式(4.3.2)中计算的  ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$  代入公式(4.3.1)求得  ${}^{t+\Delta t}\dot{u}$ ，则当前阶段的位移、加速度与前阶段的数值关系可表述如下：

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\ddot{u} &= f({}^{t+\Delta t}u, {}^tu, {}^t\dot{u}, {}^t\ddot{u}) \\ {}^{t+\Delta t}\dot{u} &= f({}^{t+\Delta t}u, {}^tu, {}^t\dot{u}, {}^t\ddot{u}) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

如下面公式所示，将公式(4.3.1)和(4.3.2)代入至动力平衡方程(4.1.1)，则动力平衡方程可用前一阶段位移、速度、加速度和当前阶段位移来表示如下。通过公式(4.3.6)计算当前阶段的位移，再通过当前阶段位移和前一阶段的值利用公式(4.3.7)计算当前阶段的加速度和速度。阻尼可使用公式(4.3.8)按刚度和质量的比例计算。

$$[M] {}^{t+\Delta t}\ddot{u} + [C] {}^{t+\Delta t}\dot{u} + [K] {}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}p \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned} [[K] + a_0[M] + a_1[C]] {}^{t+\Delta t}u &= {}^{t+\Delta t}p + [M](a_0 {}^tu + a_2 {}^t\dot{u} + a_3 {}^t\ddot{u}) \\ &+ [C](a_1 {}^tu + a_4 {}^t\dot{u} + a_5 {}^t\ddot{u}) \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$[\hat{K}] {}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}\hat{p} \quad (4.3.6)$$

$$\begin{aligned}
 [\hat{K}] &= [K] + a_0[M] + a_1[C] \\
 {}^{t+\Delta t}\hat{p} &= {}^{t+\Delta t}p + [M](a_0 {}^t u + a_2 {}^t \dot{u} + a_3 {}^t \ddot{u}) + [C](a_1 {}^t u + a_4 {}^t \dot{u} + a_5 {}^t \ddot{u}) \\
 {}^{t+\Delta t}\ddot{u} &= a_0 ({}^{t+\Delta t}u - {}^t u) - a_2 {}^t \dot{u} - a_3 {}^t \ddot{u}, \quad {}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t \dot{u} + a_6 {}^t \dot{u} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{u} \quad (4.3.7)
 \end{aligned}$$

$$\text{其中,} \quad a_0 = \frac{I}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{I}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{I}{2\alpha} - I$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - I, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right), \quad a_6 = \Delta t(I - \delta), \quad a_7 = \delta \Delta t$$

$\alpha, \delta$  : Newmark积分参数(平均加速度取  $\alpha = 0.5, \delta = 0.25$ )

$\Delta t$  : 积分时间间隔

$$[C] = a[K] + b[M] \quad (4.3.8)$$

其中,  $a, b$  : 质量和刚度比例因子

考虑刚度和阻尼的非线性特点时可使用直接积分法。直接积分法因为对所有时间阶段都要做分析, 所以分析时间会较长。使用直接积分法所需数据和输入时注意事项如下:

- ✓ 分析时间(或计算次数): 想要分析的时间长度(或计算次数)
- ✓ 分析时间间隔: 分析时间间隔会对分析结果的准确性有很大影响, 时间间隔的大小与结构自振振型的周期、荷载的周期是有密切联系的。时间间隔对若取不适当的值的时候会产生不准确的结果。一般来说时间间隔宜取所要考虑的最高阶振型周期的1/10, 并且分析用时间间隔不能大于荷载的时间间隔。

$$\Delta t = \frac{T_p}{10} \quad (4.3.9)$$

其中,  $T_p$  : 所要考虑的最高阶振型的周期

- ✓ 因为分析时间的长短与时间间隔相关, 所以时间间隔不要低于所需时间间隔过多。

- ✓ 使用刚度和质量的比例定义阻尼矩阵。
- ✓ 时间积分方法：输入newmark方法所需的参数。加速度常量法对所有的条件都会收敛，线性加速度方法根据所给条件不同有可能不收敛，所以尽量使用加速度常量法。
- ✓ 动力荷载：施加在结构节点或基础上的动力荷载是时间的函数。函数要充分表现荷载变化。任意时间的荷载值取输入的荷载的线性插值。

为了有利于用户的理解，下面说明结构动力分析所必须了解的基本事项。

图4.3.1是单自由度结构动力理想化模型，单自由度体系的力的平衡方程式可以写成下列形式：

$$f_I(t) + f_D(t) + f_E(t) = f(t) \tag{4.3.10}$$

$f_I(t)$  (惯性力)是体现抵抗结构运动速度变化的惯性力，其大小等于质点的质量与质点绝对加速度的乘积，即  $m\ddot{u}(t)$ ，其方向与绝对加速度的方向相反。

$f_E(t)$  (弹性恢复力)是结构抵抗变形使质点从振动位置恢复到原来平衡位置的力，其大小与质点相对于地面的位移和体系的侧移刚度成正比，即  $ku(t)$ ，其方向与位移的方向相反。

$f_D(t)$  (阻尼力)是使体系振动不断衰减的力，它来自结构材料的内部摩擦、结构构件连接处的摩擦、结构周围介质的阻力以及地基变形的能量耗散，通常采用粘滞阻尼理论，即假设体系阻尼的大小与质点相对于地面的速度成正比( $c\dot{u}(t)$ )，其方向与运动速度方向相反。

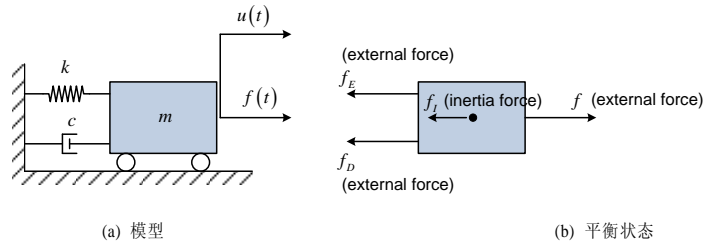


图 4.3.1 单自由度运动体系

上述作用力可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} f_I &= m\ddot{u}(t) \\ f_D &= c\dot{u}(t) \\ f_E &= ku(t) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

其中,  $m$  : 质量  
 $c$  : 阻尼系数  
 $k$  : 弹性模量

由图4.3.1表示的作用力平衡关系可以推导出单自由度结构体系的运动方程, 形式如下:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (4.3.12)$$

当  $f(t) = 0$  时, 方程式就蜕化为自由振动方程, 再追加  $c = 0$  的条件, 就变成无阻尼自由振动方程。当  $f(t)$  为任意时刻的激振力(激振位移、速度、加速度等)时, 方程式为强迫振动。

动力平衡方程可以通过振型叠加法(Mode Superposition Method)或直接积分法(Direct Integration Method)来求解。



## 等效线性分析

## 5.1 一维自由场分析

对结构建设之前地基的地震响应分析称之为自由场分析。自由场分析用于确定设计反应谱、评价液化状态、确定基础或地基的地震荷载。

自由场分析是计算通过线性粘弹性场的垂直剪切波的地震响应分析。如图 5.1.1 所示，分析模型由垂直向下无数个地层和半无限空间的地表层组成。

假定每个地层的材料为均质材料，具有各向同性特性。分析模型中，震动由竖直方向的穿透或反射的剪切波产生，仅发生水平方向的位移。即，波动方程需满足以下公式。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\xi G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} \quad (5.1.1)$$

其中， $u$ 表示 $t$ 时刻发生的位移， $\rho$ 、 $G$ 、 $\xi$ 分别表示质量密度、剪切弹性模量、滞回阻尼比。

将位移函数用公式 5.1.2 表示为简谐函数，将公式 5.1.1 转换成基本方程 5.1.3，应力应变关系公式如 5.1.4 所示。

$$u(x, t) = u(x, \omega) e^{i\omega t} \quad (5.1.2)$$

$$G^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \omega) - \rho \omega^2 u(x, \omega) = 0 \quad (5.1.3)$$

$$\tau(x, \omega) = G^* \frac{\partial}{\partial x} u(x, \omega) \quad (5.1.4)$$

其中， $\tau(x, \omega)$ 为剪切应力， $G^* = G(1 + i2\xi)$ 为复数剪切模量(Complex shear modulus)。

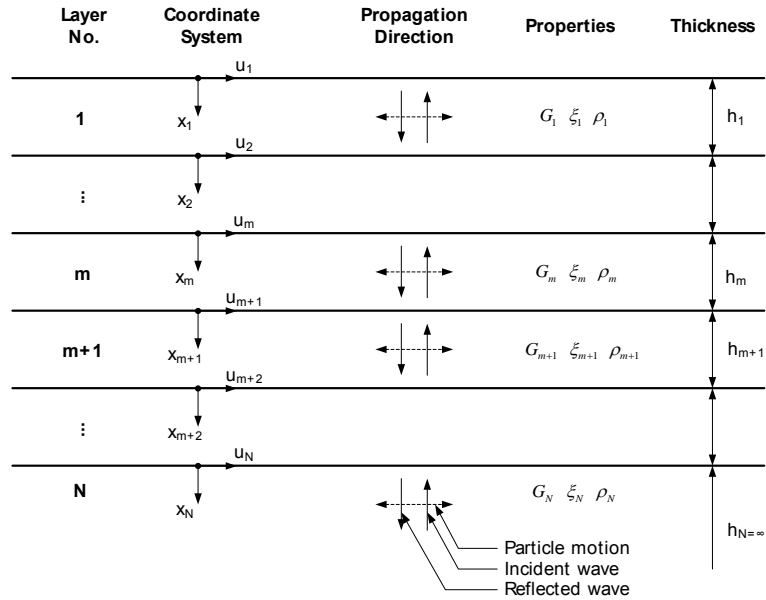


图 5.1.1 一维自由场分析模型

为了获得波动传递方程的解，一般来说把自由场表示为如图5.1.1所示，由上至下将土层编号，将第 \$m\$ 个层的响应用 \$u\_m\$ 表示，则该响应可用第 \$m\$ 层距离地表的深度 \$x\_m\$ 表示如下。

$$u_m(x_m, \omega) = A_m(\omega)e^{ik_m^*x_m} + B_m(\omega)e^{-ik_m^*x_m} \quad (5.1.5)$$

$$\tau_m(x_m, \omega) = ik_m^*G_m^*(A_m(\omega)e^{ik_m^*x_m} - B_m(\omega)e^{-ik_m^*x_m}) \quad (5.1.6)$$

其中， $k_m^* = \omega/V_{sm}^*$ 、 $V_{sm}^* = \sqrt{G_m^*/\rho_m}$ ， $A_m$  和  $B_m$  为层响应系数， $A_m$  为向上传递的弹性波， $B_m$  为向下传递的弹性波成分。在相邻层的边界上满足如下协调条件和平衡条件。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m(x_m = h_m) = u_{m+1}(x_{m+1} = 0) \\ \tau_m(x_m = h_m) = \tau_{m+1}(x_{m+1} = 0) \end{array} \right\} m = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (5.1.7)$$

将公式(5.1.5)和(5.1.6)代入公式(5.1.7)可得如下公式。

$$\left. \begin{cases} A_{m+1} + B_{m+1} = A_m e^{ik_m^* h_m} + B_m e^{-ik_m^* h_m} \\ A_{m+1} - B_{m+1} = \frac{k_m^* G_m^*}{k_{m+1}^* G_{m+1}^*} A_m e^{ik_m^* h_m} - B_m e^{-ik_m^* h_m} \end{cases} \right\}, m = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (5.1.8)$$

将其整理可得相邻土层的响应系数之间的关系如下。

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= \frac{1}{2} A_m (1 + \alpha_m^*) e^{ik_m^* h_m} + \frac{1}{2} B_m (1 - \alpha_m^*) e^{-ik_m^* h_m} \\ B_{m+1} &= \frac{1}{2} A_m (1 - \alpha_m^*) e^{ik_m^* h_m} + \frac{1}{2} B_m (1 + \alpha_m^*) e^{-ik_m^* h_m} \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

其中， $h_m$  为第  $m$  个土层的厚度， $\alpha_m^*$  为相邻层之间的动力刚度比。

$$\alpha_m^* = \frac{k_m^* G_m^*}{k_{m+1}^* G_{m+1}^*} \quad (5.1.10)$$

因为地表面的剪应力为零，由公式(5.1.6)可得  $A_1 = B_1$ ，因此第  $m$  个土层的响应系数可用第一个土层的响应系数向下逐渐推进计算，公式如下。

$$\begin{aligned} A_m(\omega) &= a_m(\omega) A_1(\omega) \\ B_m(\omega) &= b_m(\omega) B_1(\omega) \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

其中， $a_1 = b_1 = 1$ 。

层边界  $i$  和层边界  $j$  之间的传递函数  $H_{ij}(\omega)$  可用下式计算。

$$H_{ij}(\omega) = \frac{u_i(\omega)}{u_j(\omega)} = \frac{a_i(\omega) + b_i(\omega)}{a_j(\omega) + b_j(\omega)} \quad (5.1.12)$$

得到传递函数  $H_{ij}(\omega)$  和层边界  $j$  上的响应  $u_j(\omega)$  时，则层边界  $i$  上的响应  $u_i(\omega)$  可按如下公式计算。



$$u_i(\omega) = H_{ij}(\omega)u_j(\omega) \quad (5.1.13)$$

使用频域分析方法计算岩土的非线性响应时一般会使用等效线性技术(equivalent linearization technique)，这是因为频域分析方法一般假定地基响应为线性。

频域分析中将剪切弹性模量和阻尼视为不随时间变化的常量，即不能考虑如图 5.1.2 所示的随剪切应变而变化的刚度。因此在频域分析中需要用如图 5.1.3 所示的前一阶段的剪切应变修改地基的刚度和阻尼比，通过反复的线性分析来表现地基的非线性特性。如图 5.1.2 所示，最大剪切应变比实际发生的应变能大，因此在计算剪切刚度和阻尼比时使用的剪切刚度为有效剪切刚度，即在前一阶段的最大剪切应变上乘以小于 1 的折减系数(例如 0.65，参见下面公式)。表 5.1.1 为基于等效线性化技术的自由场分析的步骤。

$$\gamma_{\max} = \max_t \{ \gamma_{\text{oct}}(t) \} \quad (5.1.14)$$

$$\gamma_{\text{oct}}(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2(t) + \varepsilon_z^2(t) + \{ \varepsilon_x(t) - \varepsilon_z(t) \}^2 + 6\gamma_{yz}^2(t) + 6\gamma_{xz}^2(t)} \quad (5.1.15)$$

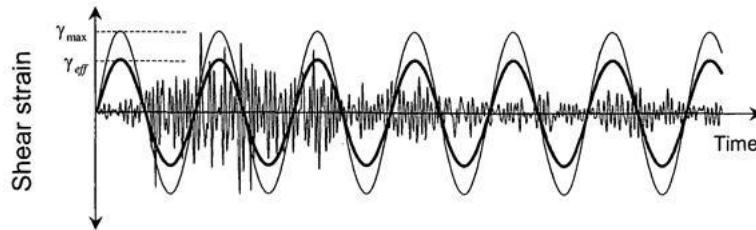


图 5.1.2 最大剪切应变和有效应变的差异

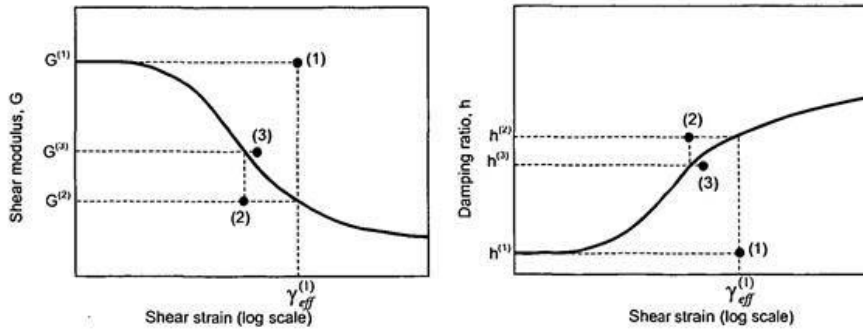


图 5.1.3 基于等效线性化技术的非线性剪切弹性模量和阻尼的收敛过程

表 5.1.1 基于等效线性化技术的自由场分析步骤

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 设置各层的剪切模量(<math>G</math>)和阻尼比(<math>h</math>)的初始值, 一般使用应变很小时的值。</li> <li>2. 使用初始值进行自由场分析获得各层的最大剪切应变 <math>\gamma_{\max}</math>。</li> <li>3. 计算各层的有效剪切应变 <math>\gamma_{\text{eff}}</math>。                     <math display="block">\gamma_{\text{eff}} = R_{\gamma} \times \gamma_{\max}</math>                     其中, <math>R_{\gamma}</math> 为有效剪切应变和最大剪切应变的比例, 使用 0.65 或根据地震的规模 <math>M</math> 按下式计算(Seed &amp; Sun, 1992)。                     <math display="block">R_{\gamma} = \frac{M-1}{10}</math> </li> <li>4. 使用各层的有效剪切应变 <math>\gamma_{\text{eff}}</math> 通过各层的 <math>G/G_{\max} - \gamma_{\text{eff}}</math> 曲线和 <math>h - \gamma_{\text{eff}}</math> 曲线可得剪切模量 <math>G</math> 和阻尼比 <math>h</math>。</li> <li>5. 重复步骤 2~4, 直到 <math>G</math> 和 <math>h</math> 收敛为止, 一般来说相对误差为小于 5% 可视为收敛。另外一般重复计算 5 次即可收敛。</li> </ol>
--

## 5.2 二维等效线性分析

### 5.2.1 概要

地基-结构协同分析与一般的结构动力学问题不同之处在于协同分析存在因地基的空间无限性引起的耗散衰减(radation damping)现象。结构的阻尼一般是由材料的摩擦引起的，会引起结构运动的衰减；发散阻尼是由于波动能量在无限地基上的耗散引起的，会引起结构的动能衰减。

耗散阻尼在运动方程中包含在阻尼项中，其大小由向外传播的波动状态决定。波动状态用频域模拟比较方便。

一般来说地基材料为非均质材料，其力学特性具有非常复杂的非线性特性。正确分析地基-结构的协同分析，需要正确反映上述的耗散阻尼特性和地基材料的非线性特性。因此使用了频域分析模拟耗散阻尼特性，使用等效线性技术模拟材料的非线性特性，这是地基-结构协同分析比较有效的方法。

分析过程中使用了快速傅里叶转换(FFT, Fast Fourier Transform)技术进行了频域分析，运动方程中将自由场响应结果作为外部运动作用，形成统一的地基-结构协同分析公式。为了减少需要计算的频率数量，使用了单自由度传递函数内插法，因此决定基本频率的计算范围非常重要。

### 5.2.2 运动方程

将自由场分析得到的基岩的地震响应作为地基-结构协同分析的运动方程的外部运动，方程如下。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = -\{m\}\ddot{y} + \{F\} - \{T\} \quad (5.2.1)$$

其中， $\{u\}$ 为模型底面各节点的相对位移向量， $[M]$ 为单位厚度的二维地基-结构体系的质量矩阵， $[K]$ 为考虑了阻尼效果的单位厚度的二维地基-结构体系的复数刚度矩阵。 $\{m\}$ 为针对输入的运动方向的质量向量， $\ddot{y}$ 为作用在模型底面的地震动。 $\{V\}$ 为三维方向的粘性边界上发生的力，可用如下公式计算。

$$\{V\} = \frac{1}{L}[C](\{\dot{u}\} - \{\dot{u}_f\}) \quad (5.2.2)$$

其中， $L$ 为平面体系的厚度， $[C]$ 为体现自由场的特性的对角线矩阵， $\{\dot{u}_f\}$ 为自由场的速度向量。

在公式(5.2.1)中 $\{F\}$ 为地基-结构体系中作用竖向端部的荷载，可按下面公式计算。

$$\{F\} = [G]\{u_f\} \quad (5.2.3)$$

其中， $[G]$ 为自由场的复数刚度矩阵， $\{u_f\}$ 为自由场的位移向量。

公式(5.2.1)中的 $\{T\}$ 为传递边界条件上波动能量的水平传递引起的力，可用下面公式计算。

$$\{T\} = ([R] + [L])(\{u\} - \{u_f\}) \quad (5.2.4)$$

其中， $[R]$ 和 $[E]$ 为由Lysmer、Drake和Wass推荐的使用频率计算的边界的刚度矩阵。

公式(5.2.1)的输入运动 $\ddot{y}(t)$ 可用多个谐调振动的组合表示如下。

$$\ddot{y}(t) = \text{Re} \sum_{s=0}^{N/2} \ddot{Y}_s e^{i\omega_s t} \quad (5.2.5)$$

其中， $N$ 为输入表示运动数量。综上所述，地基-结构体系的响应可用如下公式表示。

$$\{u\} = \text{Re} \sum_{s=0}^{N/2} \{U\}_s e^{i\omega_s t} \quad (5.2.6a)$$

$$\{u_f\} = \text{Re} \sum_{s=0}^{N/2} \{U_f\}_s e^{i\omega_s t} \quad (5.2.6b)$$

将公式(5.2.6)和公式(5.2.2)代入公式(5.2.1)整理如下。

$$\begin{aligned}
 & ([K] + [R]_s + [L]_s - \omega_s^2 [M]) \{U\}_s \\
 & = -\{m\} \ddot{Y}_s + ([G] + [R]_s + [L]_s) \{U_f\}_s
 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

其中， $\{U_f\}_s$  可表示如下， $\{A_f\}_s$  为底边输入运动的传递函数。

$$\{U_f\}_s = \{A_f\}_s \ddot{Y}_s \tag{5.2.8}$$

将公式(5.2.8)代入公式(5.2.7)后整理如下。其中  $[K]_s$  为体系的由频率决定的刚度矩阵， $\{P\}_s$  为  $\ddot{Y}_s = 1$  时的输入运动的荷载向量。

$$[K]_s \{U\}_s = \{P\}_s \ddot{Y}_s \tag{5.2.9a}$$

$$[K]_s = [K] + [R]_s + [L]_s - \omega_s^2 [M] \tag{5.2.9b}$$

$$\{P\}_s = ([G] + [R]_s + [L]_s) \{A_f\}_s - \{m\} \tag{5.2.9c}$$

在公式(5.2.9)两边除以  $\ddot{Y}_s$  可得公式(5.2.10)， $[K]_s$ 、 $\{P\}_s$ 、 $\{A\}_s$  为圆频率  $\omega$  的函数。

$$[K]_s \{A\}_s = \{P\}_s \tag{5.2.10}$$

由公式(5.2.10)计算  $\{A\}_s$ ，则可由公式(5.2.6a)得  $\{u\}$  如下。

$$\{u\} = \text{Re} \sum \{A\}_s \ddot{Y}_s e^{i\omega_s t} \tag{5.2.11}$$

在时域上的响应可用FFT方法将公式(5.2.7)转换为时域后进行计算。

### 5.3 传递边界条件

地基-结构协同分析模型需要确定适当的模型尺寸来模拟无限空间地基，边界条件也要与实际的场地条件接近。

地基模型的边界条件一般有单元边界条件、粘性边界条件、传递边界条件构成。单元边界条件为自由场的边界，可分为输入地震作用的自由端、输入位移的固定端、水平旋转端和竖向旋转端。单元边界条件虽然可以考虑自由场的地震和影响，但是不能反映基础板的反射波的影响。而这种影响距离基础板越近其影响越大。

为了修改单元边界条件的弱点，Kuhlemeyer、Ang、Newmark 等开发了可以吸收与边界成一定角度的波的粘性边界条件。但是粘性边界条件也不能完美的模拟复杂的表面波的影响，因此与单元边界条件相同，边界的位置要设置距离基础板较远的位置。

传递边界条件改善了粘性边界条件，可以模拟各种波的影响。传递边界条件由考虑水平方向土层频率影响的弹簧和阻尼构成。传递边界条件一般假设土层的水平方向特性相同，即便是直接在结构上设置传递边界也能得到满意的结果。但是为了考虑水平方向应变对地基特性的影响，最好在基础板与边界之间有一定距离。

愿MIDAS系列软件

能对土木、建筑结构的分析和设计领域的技术发展贡献微薄之力。

---

**制 作：** 北京迈达斯技术有限公司

---



## 北京迈达斯技术有限公司

---

### 北京公司

北京市海淀区中关村南大街乙56号方圆大厦21层

■ 010-5165-9908    ✉ [BeiJing@midasuser.com](mailto:BeiJing@midasuser.com)

### 广州公司

广州市越秀区东风中路445号越秀城市广场北塔1403室

■ 020-61133618    ✉ [GuangZhou@midasuser.com](mailto:GuangZhou@midasuser.com)

### 沈阳公司

沈阳市和平区十一纬路12号银基大厦1104室

■ 024-62222800    ✉ [ShenYang@midasuser.com](mailto:ShenYang@midasuser.com)

### 上海公司

上海市宜山路889号齐来大厦805室

■ 021-51697500    ✉ [ShangHai@midasuser.com](mailto:ShangHai@midasuser.com)

### 成都公司

成都市青羊区青龙街铂金时代1号楼1301室

■ 028-68881989    ✉ [ChengDu@midasuser.com](mailto:ChengDu@midasuser.com)

### 武汉公司

武汉市江岸区江汉路26号正信大厦1042室

■ 027-82777061    ✉ [Wuhan@midasuser.com](mailto:Wuhan@midasuser.com)